1. *Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van az alábbi önadjungált mátrixnak?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A Sylvester-tétel szerint bármely olyan D diagonális mátrixnak, amely valamely invertálható P mátrixszal P^*AP-ként megkapható, ugyanannyi pozitív, negatív és 0 eleme van az átlójában, tehát a kérdést meg lehet válaszolni úgy, hogy A-t szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizáljuk.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & i \\ 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & i \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & i \\ 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & i \\ 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & i \\ 0 & 0 & -3 & 1-i \\ 0 & 0 & 1+i & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1-i \\ 0 & 0 & 1+i & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

Ebből következik, hogy a sajátértékek között is három pozitív és egy negatív van.
(A másik lehetőség a karakterisztikus polinom kiszámítása, ami ebben az esetben nem túl kényelmes. Mindenesetre $k_A(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 5$-ben három előjelváltás van, s mivel egy önadjungált mátrixnak minden sajátértéke valós, a Descartes-féle előjelszabály ebben az esetben azt mondja, hogy ebből pontosan három pozitív, és így egy negatív.)

2. *Számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!*

Megoldás: $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k_{A^*A} = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$.
$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
A^*A-hoz ortonormált sajátbázis a sajátértékek $3, 1$ sorrendjében: $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \}$.
$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (AV_1 első oszlopát $\sigma_1 = \sqrt{3}$-mal, a másodikat $\sigma_2 = 1$-gyel osztottuk le.)
Redukált felbontás: $A = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ A teljes felbontáshoz csak U_1-et kell kiegészíteni unitérré (ortogonálissá), és Σ_1-et nullákkal 3×2-essé, mert V_1 maga is unitér. U_1-ben harmadik oszlopnak jó lesz az első kettő vektoriális szorzata, így a teljes felbontás:

$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

Az $U = [U_1|U_2]$ mátrixban az U_2 oszlopai egyébként $\mathcal{N}(A^*)$ ortonormált bázisát adják, így a hiányzó oszlopot ebből is ki tudtuk volna számolni, ahogy a $V = [V_1|V_2]$ mátrixban V_2 oszlopai az $\mathcal{N}(A)$ tetszőleges ortonormált bázisaként is megkaphatók.

3. *Számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrix SVD-felbontását, és annak felhasználásával az* A^* *és* A^{-1} *mátrixok SVD-felbontását is!*

Megoldás:

$$A^*A = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -2i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$k_{A^*A}(x) = x^2 - 10x + 16$, tehát A^*A sajátértékei $8, 2$, és $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, illetve $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ hozzájuk tartozó sajátvektorok.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AV = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A^* = V\Sigma^* U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, de ebben a szinguláris értékek nem fogyó, hanem növő sorrendben vannak, ezért megfordítjuk a szinguláris értékek, és velük együtt a hozzájuk tartozó jobb és bal szinguláris vektorok (azaz V oszlopainak és U^* sorainak) sorrendjét is, hogy SVD-felbontást kapjunk:

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

4. *Minél egyszerűbben határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás: a) Mivel az A mátrix önadjungált (elég, hogy normális), tartozik hozzá ortonormált sajátbázis, sőt ezt vehetjük úgy, hogy a megfelelő sajátértékek abszolút értékei csökkenőek legyenek: -2-höz $(0,1)$, 1-hez $(1,0)$ tartozik. Így a $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = QDQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixban módosíthatjuk az előjeleket egy unitér mátrixszal való szorzással.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebben a felbontásban a két szélső mátrix unitér, a középső pedig nemnegatív diagonális, amelyben a diagonális elemek fogyó sorrendben vannak, ezért ezek a diagonális elemek csak a szinguláris értékek lehetnek, és a felbontás a teljes SVD-felbontás. A redukált ugyanez, mert a mátrix teljes rangú négyzetes mátrix.

b) Itt is alkalmazhatunk egyszerűsített módszert, mivel a mátrix rangja 1. Ekkor $\mathcal{O}(V_1) = \mathcal{O}(B^*B) = \mathcal{O}(B^*) = \overline{\mathcal{S}(B)} = \operatorname{span}((1,1))$, tehát $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, és a $BV_1 = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ szorzatból $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ és $\Sigma_1 = [\,2\,]$. Tehát a redukált SVD-felbontás

$$B = \begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\cdot[\,2\,]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}.$$

c) Érdemes a mátrix transzponáltjára kiszámítani a felbontást, mert akkor kisebb mátrixra (csak 2×2-esre a 3×3-as helyett) kell sajátvektorokat keresni, és aztán a felbontást megtranszponálni.

$$C^* = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -2\\0 & 1\end{bmatrix},\quad CC^* = \begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix},\quad k_{CC^*}(x) = x^2 - 10x + 9,\quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\quad C^*V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-4 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$

A C^*V_1 oszlopait a megfelelő szinguláris értékekkel ($\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$) leosztva megkapjuk a U_1 mátrixot:

$$C^* = U_1\Sigma_1V_1^* = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-4 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

Így az eredeti mátrix redukált SVD-felbontása:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\\3 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

5. *Írjuk fel a 4. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!*

Megoldás: A B teljes SVD-felbontásához tetszőlegesen kiegészítjük a redukált felbontásbeli szemiortogonális mátrixokat ortogonálissá, és a Σ_1-et B-vel megegyező méretű Σ-vá:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}.$$

A C mátrix teljes SVD-felbontása a redukált felbontás kiegészítésével:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\-2/3 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}..$$

C diadikus felbontása a redukált SVD felbontásból

$$3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\end{bmatrix}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{bmatrix}1/6 & 4/6 & -1/6\\-1/6 & -4/6 & 1/6\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}.$$

6. *Számítsuk ki a 4.-beli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!*
Megoldás: Az $U_1\Sigma_1V_1^*$ redukált felbontású mátrix pszeudoinverze $V_1\Sigma^{-1}U_1^*$.

$$B^+=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

$$C^+=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}^+=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-4 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5 & 4\\2 & -2\\4 & 5\end{bmatrix}$$

7. *Számítsuk ki a 4. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?*

Megoldás: Ha $A=U\Sigma V^*$ teljes SVD-felbontás, akkor A polárfelbontása $A=(U\Sigma U^*)(UV^*)$.

A 4. feladat első két mátrixára ez $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$, és $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$.

Az invertálható A mátrixnak egyértelmű a polárfelbontása, B polárfelbontásában viszont az ortogonális mátrix többféle is lehet, például a $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ felbontás is megfelel.

8. *Adjuk meg a 4.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?*

Megoldás: Az A mátrixra

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}.\text{ Az eltérés }\left\|\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\|_F=\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2}=1,$$

vagy a tételből adódóan a kihagyott szinguláris értékek négyzetösszegének négyzetgyöke, ami $\sqrt{1^2}=1$.

A C mátrixra

$$C^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 2 & -1/2\\-1/2 & -2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Az eltérés $\sqrt{\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}}=1$, illetve $\sqrt{\sigma_2^2}=1$.