1. *Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!*
a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$
b) $xy = 1$

Megoldás: a) Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = (x-2y)^2 - 3y^2 + 6y - 2 = (x-2y)^2 - 3(y-1)^2 + 1$, tehát az $x' = x - 2y$ és $y' = y - 1$ helyettesítéssel a görbe egyenlete $(x')^2 - 3(y')^2 = -1$. Ez egy hiperbola egyenlete, de a koordinátatranszformáció nem egybevágóság:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + 2y' + 2 \\ y' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát az új koordinátarendszert úgy kapjuk meg a régiből, hogy az $(1,0)$ és $(0,1)$ bázisvektorok helyett az $(1,0)$, $(2,1)$-et választjuk, és az origót a $(2,1)$ pontba toljuk. (Ortogonális transzformációval és eltolással is lehet diagonalizálni, ha pontosan szeretnénk ábrázolni a görbét, mint a 3. feladatban.)

b) $xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$, azaz az $x' = x + y$ és $y' = x - y$, vagy másképpen $x = \frac{1}{2}(x'+y')$ és $y = \frac{1}{2}(x'-y')$ koordinátatranszformációval az $(x')^2 - (y')^2 = 4$ alakra jutunk. Itt az áttérés lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ez ugyan nem ortogonális, de ha helyette a $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixot használjuk, akkor az $(x')^2 - (y')^2 = 2$ hiperbola-egyenletet kapjuk, és ez már mérettartó transzformáció.

2. *Hozzuk diagonális alakra az $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!*

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$k_A(x) = -(x-3)(x-1)x$, és az egyes sajátértékekhez tartozó egy-egy normált sajátvektor: $\lambda_1 = 3$-hoz $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $\lambda_2 = 1$-hez $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, és $\lambda_3 = 0$-hoz $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ ortonormált bázist alkotnak. Tehát

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{-re } Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A kvadratikus alak az új bázisban $3(x_1')^2 + (x_2')^2$.

3. *Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!*

Megoldás: Az egyenlet mátrixos felírása:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0.$$

A kvadratikus alak $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixát ortogonálisan diagonalizáljuk.
A sajátértékei 9 és 1, a hozzá tartozó ortonormált sajátbázis $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \}$, és a $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrixszal $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Áttérve az új bázisra:
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Az egyenlet az új koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} 0 &= [\,x' \quad y'\,]\, Q^TAQ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [\,-18 \quad -18\,]\, Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 = \\ &= 9(x')^2 + (y')^2 + [\,-18\sqrt{2} \quad 0\,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 = \\ &= 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9, \end{aligned}$$

amiből egy $x'' = x' - \sqrt{2}$ és $y'' = y'$ eltolással az

$$(x'')^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek (az új koordinátarendszerben) a középpontja az origó, a vízszintes féltengelye 1, a függőleges 3 hosszú. A régiben ezek a tengelyek az $(1,1)$, illetve $(-1,1)$ bázisvektorokkal párhuzamosak, de a méretük ugyanakkora, mivel ortogonális transzformációt alkalmaztunk, és a középpont egyenlete az $x'' = 0$, $y'' = 0$ értékekből visszaszámolva $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. *Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^TAP$, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Hozzuk szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonális alakra az A mátrixot, aztán a diagonális elemeket előjelek szerint B-nek megfelelően rendezzük a megfelelő oszlopok és sorok cseréjével, majd a $c \neq 0, \pm 1$ diagonális elemek sorát és oszlopát elosztjuk $\sqrt{|c|}$-vel, hogy megkapjuk a B mátrixot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és az áttérés mátrixát megkapjuk, ha I-re is végrehajtjuk az oszlopműveleteket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Alternatív megoldás:
Ortogonális diagonalizálással is diagonális alakra hozhatjuk az A mátrixot (ekkor a sajátértékeket a B-nek megfelelő előjelsorrendben vesszük sorra),
és a $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n) = D$ diagonális mátrixot tovább bontjuk:
$D = \operatorname{diag}(c_1,\dots,c_n)\operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(d_1),\dots,\operatorname{sgn}(d_n))\operatorname{diag}(c_1,\dots,c_n) = CBC$
alakban, ahol $c_i = \sqrt{|d_i|}$, ha $d_i \neq 0$, és 1 különben, sgn pedig az előjelfüggvény. Ekkor $Q^TAQ = CBC = C^TBC$-ből $B = (QC^{-1})^TA(QC^{-1})$.
A sajátértékek $3, 0, -3$, és hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $(2,2,1)$, $(-2,1,2)$ és $(1,-2,2)$. Tehát

$$Q^TAQ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & -2 \\ 1 & 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixszal $B = P^TAP$.

5. *Adjunk példát olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra, amelyekre*
a) $A \cong B$, *de* $A \not\sim B$;
b) $A \sim B$, *de* $A \ncong B$.

Megoldás: a) $I \cong (2I)^TI(2I) = (2I)I(2I) = 4I$, de I nyilván nem hasonló $4I$-hez (I-t bármivel konjugálva $P^{-1}IP = I$-t kapjuk).

b) Elég olyan A szimmetrikus mátrixot találni, amit valamivel megkonjugálva (nyilván nem ortogonálissal) nem szimmetrikus mátrixot kapunk, mert szimmetrikus mátrix csak szimmetrikussal lehet kongruens. Például $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ választással $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ hasonló A-hoz, de nem kongruens vele.

6. *Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: A főminorjai rendre a, a^2-4, $a(a^2-4)$. Ezek akkor mind pozitívak, ha $a > 2$, tehát ekkor lesz A pozitív definit, és akkor $-,+,-$ előjelűek, ha $a < -2$, tehát A pontosan ekkor negatív definit. Ahhoz, hogy valamilyen szemidefinit, de ne definit legyen, az A mátrixnak szingulárisnak kell lennie, azaz $|A| = (a^2-4)a = 0$, és ez csak $a = 0, 2, -2$ esetén teljesül. Könnyen látható, hogy $a = 0$ esetén a mátrix indefinit: a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ bal fölső sarokmátrix sajátértékei ± 2, tehát az indefinit, és így A is. Ha $a = 2$, akkor szimultán sor-oszlopműveletekkel $A \cong \operatorname{diag}(2,0,2)$, ha pedig $a = -2$, akkor $A \cong \operatorname{diag}(-2,0,-2)$.
Összefoglalva: A negatív definit, ha $a < -2$, negatív szemidefinit (de nem definit), ha $a = -2$, pozitív szemidefinit (de nem definit), ha $a = 2$, pozitív definit, ha $a > 2$, és a maradék esetekben, tehát $-2 < a < 2$ esetén, indefinit.

7. *a) Bizonyítsuk be, hogy x^4+5x^3+x+6 nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.*

b) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy szimmetrikus mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3+2x^2-10x+6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

Megoldás: a) Az $f(x) = x^4+5x^3+x+6$ polinomnak nyilván nem lehet pozitív gyöke, ehhez még a Descartes-féle előjelszabály sem kell. Az $f(-x) = x^4-5x^3-x+6$ polinom együtthatóin két előjelváltás van, ezért f-nek legföljebb két valós negatív gyöke lehet (multiplicitással számolva). Ebből következik, hogy f-nek nem minden gyöke valós, tehát nem lehet egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

b) A polinom együtthatói kétszer váltanak előjelet. Mivel tudjuk, hogy minden gyöke valós, ebből következik, hogy a pozitív gyökök száma pontosan 2, így van negatív gyöke is, tehát a mátrix indefinit.

8. *Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.*

Megoldás: Ha P pozitív definit, S pedig pozitív szemidefinit, akkor minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T(P+S)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T S\mathbf{x} > 0$, ugyanis az első tag pozitív, a második nemnegatív.

9. *Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix nem kongruens semelyik valós diagonális mátrixszal, de alsó (és felső) háromszögmátrixszal kongruens. Lehet-e az utóbbinál az áttérés mátrixa ortogonális?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A nem lehet diagonálissal kongruens, mivel nem szimmetrikus.
Ha kongruens felső háromszögmátrixot keresünk, akkor A-t alakítsuk át szimultán sor-oszlopműveletekkel. A sorműveleteket a felső háromszögmátrix alakra hozáshoz választjuk (vigyázunk arra, hogy ha az i. oszlopig rendben van, akkor a sorműveletek az első i soron, és így a sor-oszlopműveletek az első i oszlopon ne változtassanak). Természetesen itt a megfelelő oszlopműveletek nem feltétlenül nulláznak, de az nem is cél.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong A$$

Az alsó háromszög alakra hozást lehetne felfelé nullázással csinálni, de a Gauss-elminációnál a másik irányt szoktuk meg, ezért inkább A^T-at hozzuk felső háromszög alakra.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B \cong A^T \quad \Rightarrow$$

$$A \cong B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nem lehet ortogonális konjugálással háromszög alakra hozni a mátrixot, mert ha lehetne, akkor A minden sajátértéke valós lenne (a sajátértékek megegyeznének a háromszögmátrix sajátértékeivel, amik a háromszögmátrix diagonális elemei). De A karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x + 3$, és egy kis függvényvizsgálattal láthatjuk, hogy ennek csak egy valós gyöke van.