1. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.*

Megoldás: $(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA^*$, tehát
A ferdén öndajungált $\Leftrightarrow A^* = -A \Leftrightarrow -iA^* = iA \Leftrightarrow (iA)^* = iA \Leftrightarrow iA$ öndajungált.

2. *Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A-hoz, és még csak nem is normális!*

Megoldás: Bármely olyan nem normális 2×2-es mátrix megfelel B-nek, amelynek a sajátértékei 1 és -1, mert az diagonalizálható, és A a diagonális alakja. Legkönnyebb egy ilyen mátrixot a háromszögmátrixok között keresni, akkor csak az kell, hogy 1 és -1 legyenek az átlójában. Ráadásul egy olyan háromszögmátrix, amely nem diagonális semmiképpen sem lehet normális. Tehát például az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix megfelel.

3. *a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

Megoldás: a) Mivel a mátrix szimmetrikus, a főtengelytétel szerint ortogonálisan diagonalizálható. Csak a sajátértékeket kell meghatározni. Látható, hogy $r(A) = 1$, így a 0-hoz tartozó sajátaltér dimenziója $4 - 1 = 3$. Tehát a 0 legalább háromszoros sajátérték, s mivel a nyom 4, a negyedik sajátérték csak 4 lehet, vagyis A diagonális alakja valóban D. (Mellesleg, könnyen látható is, hogy minden sorösszeg 4, így az $(1,1,1,1)$ vektor sajátvektor, $\lambda = 4$ sajátértékkel.)

b) A 0-hoz tartozó sajátaltér az $(1,1,1,1)^\perp =: W$, tehát merőleges a 4-hez tartozó sajátvektorra (ez a normalitásból is következik). Csak W-hez kell ortogonális bázist találni. Ezt megoldhatjuk a Gauss-eliminációból kapott $\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ bázis ortogonalizálásával, vagy eleve az $(1,1,1,1)$ ortogonális kiegészítésével, de kereshetünk szép bázist: az $(1,1,1,1)$-re merőleges $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$ vektorok közül (tehát amelyekben két plusz és két minusz van) könnyen kiválogathatunk egymásra merőlegeseket: $\{(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\}$. Az $\mathbb{R}^4$ így kapott bázisát lenormálva a következő ortogonális áttérési mátrixot kapjuk:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik, ezért elég ezt a D-re felírni, és D-ből egyszerűen leolvasható, hogy a karakterisztikus polinom $(x-4)x^3$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy normális mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei merőlegesek egymásra, pontosabban*

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pontosan akkor normális, ha $\mathbb{C}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege (azaz a komponensek páronként merőlegesek egymásra);

b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy A normális, és legyenek a különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. A spektráltétel miatt van A-hoz $\mathbb{C}^n$-nek ortonormált sajátbázisa. Legyen U_i az ezek közül a λ_i-hez tartozó sajátvektorok által kifeszített altér. Ekkor $V = \mathbb{C}^n$ az U_i-k ortogonális direkt összege. Másrészt $U_i \leq V_{\lambda_i}$ minden i-re, így $n = \sum \dim U_i \leq \sum \dim V_{\lambda_i} \leq n$, tehát $U_i = V_{\lambda_i}$ $\forall i$, azaz $\mathbb{C}^n$ a V_{λ_i}-k ortogonális direkt összege. Ebből következik, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.

Fordítva, ha $\mathbb{C}^n = \oplus V_{\lambda_i}$ ortogonális direkt összeg, akkor a sajátalterek egy-egy ortonormált bázisának (amelyek léteznek, mert V_{λ_i}-k is euklideszi terek) uniója V-ben ortonormált sajátbázis, így A normális.

b) Ugyanúgy, mint a komplex esetben, csak itt a valós főtengelytétel következményét kell használni: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$-ben van A-hoz tartozó ortonormált sajátbázis.

5. *Adjuk meg az*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

Megoldás: Legyen A a feladatban megadott mátrix. A karakterisztikus polinomja $(x-1)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)^2$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez sajátvektor az $\mathbf{e}_3$, és ezt könnyen kiegészíthetjük ortonormált bázissá: $\{\, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \,\}$, tehát először a $Q_1 = [\mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_1]$ mátrixot használjuk:

$$Q_1^{-1}AQ_1 = Q_1^TAQ_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A jobb alsó sarokban levő 2×2-es mátrixnak sajátértéke a 2, amelyhez tartozó sajátvektor $(1,1)$, így ennek a háromszög alakra hozásához az $\{\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \,\}$ bázist használjuk, miközben az első koordinátán triviálisan hatunk.

$$Q_2^TQ_1^TAQ_1Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = T$$

Tehát A egy Schur-felbontása $A = QTQ^T$ a fenti $Q = Q_1Q_2$ és T mátrixokkal.

6. *Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött is, mert van 3 különböző valós sajátértéke a 3×3-as mátrixnak, de nem lehet unitéren diagonalizálható, mert akkor normális lenne, de háromszögmátrix csak akkor lehet normális, ha diagonális.

B unitér, tehát unitéren is diagonalizálható. Viszont a diagonális alak nem lehet valós, mert akkor a mátrix önadjungált (azaz valós lévén szimmetrikus) lenne.

C háromszögmátrix, ezért leolvasható róla, hogy csak az 1 a sajátértéke, háromszoros algebrai multiplicitással. Ha diagonalizálható lenne, akkor az I mátrixhoz lenne hasonló, de az I-nek minden konjugáltja önmaga. Tehát C egyáltalán nem diagonalizálható.
D öndajungált, ezért unitéren valós diagonális alakra hozható. Összefoglalva:

	A	B	C	D
diag. alak $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$-$	$\mathbb{R}$
unitéren diag.-ható?	n	i	n	i