1. *Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorok által kifeszített W altérnek egy ortogonális bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval! Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ vektor merőleges vetületét W-re, és adjuk meg a vetület koordinátavektorát a megadott ortogonális bázisban.*

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 3, 1, -1)$$

Megoldás: Először csak ortogonalizálunk, aztán normálunk. Egy-egy ortogonalizálás után az új vektort helyettesíthetjük a skalárszorosával, ha az szebb.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{|\mathbf{c}_1|^2}\mathbf{c}_1 = (1, -1, 0, 1) + \frac{2}{2}(0, 1, 0, -1) = (1, 0, 0, 0)$.
$\mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{v}_3 \rangle}{|\mathbf{c}_1|^2}\mathbf{c}_1 - \frac{\langle \mathbf{c}_2, \mathbf{v}_3 \rangle}{|\mathbf{c}_2|^2}\mathbf{c}_2 = (1, 3, 1, -1) - \frac{4}{2}(0, 1, 0, -1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 1)$.
Tehát a $\{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \,\}$ vektorrendszernek megfelelő ortogonális rendszer $\{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\,\}$, és a generált altér ortonormált bázisa ebből $\{\, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1),\ (1, 0, 0, 0),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)\,\}$.

2. *Tekintsük az $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.*
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

Megoldás: a) Látható, hogy $(1, 1, 0, 0)$ merőleges W mindkét generátorelemére, tehát $W \cap W^\perp \neq 0$, így $W^\perp$ nem lehet direkt kiegészítője W-nek.
A W merőlegesét egyébként az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk ki, ahol A sorai a W egy generátorrendszere (a megoldás vektoros alakjából a $W^\perp$ bázisát is leolvashatjuk). Ezután a $W + W^\perp$ dimenzióját ellenőrizhetjük egy másik Gauss-eliminációval, amit a két generátorrendszer uniójára alkalmazunk. Mivel $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, pontosan akkor lesz $V = W \oplus W^\perp$, ha $\dim(W + W^\perp) = \dim V$.

b) Végezzünk Gauss-eliminációt arra a mátrixra, amelynek első néhány oszlopa a W megadott generátorrendszere, a többi az, amiből a kiegészítést választhatjuk (ez lehet általában a teljes tér egy tetszőleges generátorrendszere). A lépcsős alak vezérelemei által megjelölt oszlopok a W bázisával kezdődnek, és ezt egészítik ki a többiek a V egy bázisává. Ne felejtsük el, hogy modulo 2 számolunk ebben a feladatban!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A bázisoszlopok az 1., 2., 3. és 5., tehát egy direkt kiegészítő altér egy lehetséges bázisa $\{\, \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \,\}$.

3. *Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.*
a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ hossza ebben az euklideszi térben?
b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

Megoldás: Vegyük észre, hogy A pozitív definit, mert szimmetrikus, és $[x\,y]\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x^2+4xy+5y^2 = (x+2y)^2+y^2 > 0$ minden $(x,y)\neq\mathbf{0}$-ra. Tehát az A által definiált bilineáris függvény skalárszorzat, és $\mathbb{R}^2$ ezzel a skalárszorzattal euklideszi tér.

a) $\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle = \mathbf{e}_i^TA\mathbf{e}_j$ az A mátrix ij indexű eleme. Tehát $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle_A = \langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle_A = 2$, $\mathbf{e}_1$ hossza $\sqrt{\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle_A} = 1$, $\mathbf{e}_2$ hossza pedig $\sqrt{5}$ ebben az euklideszi térben.
$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^TA\mathbf{v} = [\,1\quad 1\,]\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = -4.$

b) Használjunk Gram–Schmidt-ortogonalizációt a $\langle\ ,\ \rangle_A$ skalárszorzatra nézve, az $\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$ bázison.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\langle\mathbf{c}_1,\mathbf{e}_2\rangle_A}{\langle\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1\rangle_A}\mathbf{c}_1 = (0,1)-2(1,0) = (-2,1)$. Tehát $\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\,\} = \{(1,0),(-2,1)\,\}$ ortogonális bázis, és $\langle\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1\rangle_A = 1$, $\langle\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_2\rangle_A = [\,-2\quad 1\,]\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = 1$, így ez egyúttal ortonormált bázis is.

4. *Mutassuk meg, hogy az $n\times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.*

Megoldás: Ha $A^{-1}=A^T$ és $B^{-1}=B^T$, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$, $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, és $I^{-1}=I=I^T$.

5. *Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!*

$$A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Megoldás: B nem szemiortogonális, mert bár a sorai és oszlopai is ortogonálisak, nem alkotnak ortonormált rendszert. A oszlopai viszont ortonormált rendszert alkotnak, így A (az oszlopokra nézve) szemiortogonális, és $A^TA=I$. Ez azt jelenti, hogy A bal inverze A^T.

6. a) *Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5},0)$ vektorba!*

b) *Írjuk fel a $\mathbf{v}=(1,-1,1,-1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!*

c) *Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v=(1,-1,1,-1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?*

Megoldás: a) A forgatásmátrix $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}$

b) A tükrözés mátrixa $I-\frac{2}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\-1&1&1&1\\1&-1&1&1\end{bmatrix}$

c) $|\mathbf{v}|=2$, így a hipersík normálvektora $(-2,0,0,0)-(1,-1,1,-1) = (-3,1,-1,1)$, és a tükrözés mátrixa $I-\frac{2}{12}\begin{bmatrix}9&-3&3&-3\\-3&1&-1&1\\3&-1&1&-1\\-3&1&-1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3&3&-3&3\\3&5&1&-1\\-3&1&5&1\\3&-1&1&5\end{bmatrix}$

7. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. *Határozzuk meg az A mátrix QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!*

Megoldás: Ortogonalizáljuk a mátrix oszlopait, azaz az $\mathbf{a}_1 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (3,3,3,3)$ és $\mathbf{a}_3 = (9,1,5,-3)$ vektorokat. Az ortogonalizálás során szabad a kapott ortogonális vektorokat pozitív skalárral megszorozni, mert attól még a hozzá tartozó ortonormált rendszer ugyanaz lesz.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,-1,1,-1)$.
$\tilde{\mathbf{c}}_2 = (3,3,3,3) - \frac{0}{4}(1,-1,1,-1) = (3,3,3,3)$, így $\mathbf{c}_2 = (1,1,1,1)$ is lehet.
$\tilde{\mathbf{c}}_3 = (9,1,5,-3) - \frac{16}{4}(1,-1,1,-1) - \frac{12}{4}(1,1,1,1) = (2,2,-2,-2)$, így $\mathbf{c}_3 = (1,1,-1,-1)$.
A megfelelő ortonormált rendszer így
$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$. Ebből

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = Q^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A teljes felbontáshoz Q-t kell kiegészíteni ortogonális mátrixszá, például egy negyedik, független vektor ortogonalizálásával: $(1,0,0,0) - \frac{1}{4}(1,-1,1,-1) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{4}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{4}(1,-1,-1,1) \Rightarrow$ a negyedik vektor $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, és a felbontás

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. *A 7. feladat A mátrixára határozzuk meg az* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha* $\mathbf{b} = (0,0,0,1)$. *Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?*

Megoldás: Az $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/24 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

Ha A teljes oszloprangú (és esetünkben az), akkor $r(A^TA) = r(A)$ miatt a normálegyenlet mátrixa teljes rangú, azaz invertálható, következésképpen egyértelmű a normálegyenlet megoldása.