**1.** Egy $10 \times 10$-es $A$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel $A$ Jordan-féle normálalakját!

**2.** Van-e az $A$ mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**3.** Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n\times n}$-re $AB = BA$, akkor $A$ minden sajátaltere $B$-invariáns.

**4.** Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**5.** Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n\times n}$ hasonlók mint $L$ fölötti mátrixok, akkor $K^{n\times n}$-ben is hasonlók!

**6.** Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!

**7.** Hasonlóság erejéig hány olyan $3 \times 3$-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

**8.** Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix valamelyik négyzetgyökét!

**9.** Határozzuk meg az alábbi $A$ mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az $A^n$ hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Házi feladatok**

Beadási határidő: május 6.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

**1.** Egy $10 \times 10$-es $A$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 7, 6, 6$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 5, 4, 4$. Írjuk fel $A$ Jordan-féle normálalakját!

**2.** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi valós $A$ mátrixnak nincs 1-dimenziós invariáns altere, viszont $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ és $\mathrm{span}((-1, 0, -1, 1), (0, 1, 2, -1))$ invariáns alterek. Hozzuk ennek alapján az $A$ mátrixot $2 \times 2$-es blokkdiagonális alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**3.** Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**4.** Legyen $J$ a 3. feladatban kiszámolt Jordan-mátrix. Írjuk fel a $J^{10}$, és ebből az $A^{10}$ mátrixot, továbbá ezek (nyilván megegyező) Jordan-normálalakját!

**5.** Hasonlóság erejéig hány olyan $3 \times 3$-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a negyedik hatványával?

**6.** Vonjunk négyzetgyököt a $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixból $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben! Létezhet-e valós négyzetgyöke?

**7*.** Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy a $C = AB - BA$ mátrix rangja 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $C^2 = 0$. (Útmutatás: Mit mondhatunk $C$ nyomáról?)