

1. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben, illetve $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?
3. Lássuk be, hogy a 2×2 -es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3 -as mátrixokra ez már nem igaz.
4. Legyen $A = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy
- $k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdot k_{B_2}(x) \cdots k_{B_k}(x)$;
 - $m_A(x) = [m_{B_1}(x), m_{B_2}(x), \dots, m_{B_k}(x)]$;
 - $r(A) = r(B_1) + r(B_2) + \dots + r(B_k)$.
- Mi a helyzet, ha A csak blokkháromszög alakú?
5. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a
- karakterisztikus polinomja $(x - 1)^6$, minimálpolinomja $(x - 1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;
 - karakterisztikus polinomja $-(x - \lambda)^7$, minimálpolinomja $(x - \lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?
6. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
- karakterisztikus polinomja $-(x - 1)^3(x - 3)^4$;
 - minimálpolinomja $(x + 2)^6$, és sajátaltère 2-dimenziós?
8. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3 -as vagy 2×2 -es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.
9. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ minimálpolinomja $(x + 1)^2$?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 29.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A Cayley–Hamilton-tétel bizonyításában felírtuk egy A mátrixra az $\text{adj}(A - xI)$ mátrixot mint mátrixegytűthetős polinomot. Számítsuk ki ezt a polinomot (írjuk is fel mindegyik mátrixegytűthetőt) az alábbi A mátrixra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja, és mi a minimálpolinomjuk?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek
- karakterisztikus polinomja $-(x - 2)^7$, minimálpolinomja $(x - 2)^4$, a 2-höz tartozó V_2 sajátaltér dimenziója 2;
 - karakterisztikus polinomja $(x - \lambda)^8$, minimálpolinomja $(x - \lambda)^4$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?
5. Legyen A egy 5×5 -ös, 2 sajátértékű, B pedig egy 5×5 -ös, 0 sajátértékű Jordan-blokk. Mi az A^2 és a B^2 mátrix Jordan-normálalakja?
6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
- karakterisztikus polinomja $-(x - 2)^5(x + 3)^2$;
 - minimálpolinomja $(x - 1)^5$, és sajátaltere 2-dimenziós?
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy minden \mathbb{Z}_2 fölötti 2×2 -es mátrix nyolcadik hatványa megegyezik a négyzetével! Fogalmazzuk meg az állítást a minimálpolinomokkal kapcsolatos állításként!