**1.** Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van az alábbi önadjungált mátrixnak?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & -1 & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.** Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

**3.** Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és annak felhasználásával az $A^*$ és $A^{-1}$ mátrixok SVD-felbontását is!

**4.** Minél egyszerűbben határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**5.** Írjuk fel a 4. feladatbeli $B$ és $C$ mátrixok teljes SVD-felbontását és a $C$ mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!

**6.** Számítsuk ki a 4.-beli $B$ és $C$ mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!

**7.** Számítsuk ki a 4. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?

**8.** Adjuk meg a 4.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?

## Házi feladatok

Beadási határidő: április 22.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

**1.** Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van az alábbi valós szimmetrikus mátrixnak? Használhatjuk a Sylvester-tételt vagy a Descartes-féle előjelszabályt.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**2.** Állítsuk elő az alábbi $A$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

**3.** Az $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg $A^{-1}$ SVD-felbontását (Figyeljünk a szinguláris értékek sorrendjére)!

**4.** Írjuk fel a $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált SVD-felbontását, és számítsuk ki ebből a pszeudoinverzét!

**5.** Határozzuk meg a $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és adjuk meg ennek segítségével a polárfelbontását!

**6.** Határozzuk meg az 5. feladat $C$ mátrixának és $C^{-1}$-nek is a legjobb 1 rangú közelítését!

**7*.** Melyek azok a $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy $\varphi$-ortogonális bázisnak?