1. Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!
a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$
b) $xy = 1$

2. Hozzuk diagonális alakra az $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!

3. Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

4. Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^T AP$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Adjunk példát olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra, amelyekre
a) $A \cong B$, de $A \not\sim B$;
b) $A \sim B$, de $A \ncong B$.

6. Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

7. a) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 + 5x^3 + x + 6$ nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.
b) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy szimmetrikus mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3 + 2x^2 - 10x + 6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

8. Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.

9. Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix nem kongruens semelyik valós diagonális mátrixszal, de alsó (és felső) háromszögmátrixszal kongruens. Lehet-e az utóbbinál az áttérés mátrixa ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: április 8.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Hozzuk diagonális alakra a $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!

2. Hozzuk kanonikus alakra az $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x + 20y + 1 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

3. Határozzuk meg az alábbi szimmetrikus mátrixok jellegét:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk meg olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyre az előző feladat B mátrixához tartozó $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixa olyan diagonális mátrix, amelynek csak 0 és ± 1 elemei vannak!

5. Használjuk a Descartes-féle előjelszabályt az alábbi kérdések megválaszolásához!

a) Hány pozitív és hány negatív valós gyöke lehet az $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 + 5$ polinomnak a Descartes-féle előjelszabály szerint?

b) Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van annak a valós szimmetrikus mátrixnak, amelynek a karakterisztikus polinomja $k(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1$?

6. Hozzuk diagonális alakra a $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$ kvadratikus alakot, és határozzuk meg a jellegét! Adjunk meg egy bázist (nem feltétlenül ortogonálist), amelyben a kvadratikus alak diagonális alakú!

7*. Tudjuk, hogy egy valós négyzetes mátrix akkor és csak akkor kongruens egy diagonális mátrixszal, ha szimmetrikus. Melyek azok a 2×2-es valós mátrixok, amelyek felső háromszögmátrixszal kongruensek? Általánosítsuk a feltételt $n \times n$-es mátrixokra, és bizonyítsuk be a feltétel szükségességét az általános esetben is.