1. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.

2. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A-hoz, és még csak nem is normális!

3. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

4. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei merőlegesek egymásra, pontosabban
a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pontosan akkor normális, ha $\mathbb{C}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege (azaz a komponensek páronként merőlegesek egymásra);
b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege

5. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

6. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: március 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrixnak (komplex) skalárszorosa, hatványa, és inverze (ha van) normális, de normális mátrixok szorzata lehet nem normális (adjunk ellenpéldát)!

2. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!

c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

3. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix Schur-felbontását!

4. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ szimmetrikus mátrix, $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$, és $(1,1,0)$ az A-nak a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Adjunk meg $\mathbb{R}$-ben az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével határozzuk meg az A mátrixot. (Felhasználhatjuk a 4. gyakorló feladat állítását.)

5. Tegyük fel, hogy az $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix normális, az A mátrixot pedig úgy kaptuk N-ből, hogy az i. sorát, majd az i. oszlopát megszoroztuk -1-gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy A is normális! (Útmutatás: hogyan kaphatjuk meg N-et A-ból mátrixszorzással?)

6. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós, illetve komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7*. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy önadjungált mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az $A, A^2, A^3, \ldots$ mátrixok vagy mind különbözőek, vagy legfeljebb két különböző van köztük!

Milyen feltétel mellett adnak az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ valós számok olyan $A = \begin{bmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{bmatrix}$ önadjungált mátrixot, amelyre az $\{\, A, A^2, A^3, \ldots \}$ halmazban pontosan két különböző mátrix van?