1. *Mutassuk meg, hogy az alábbiak vektorterek! Hány dimenziósak? Adjunk meg bennük bázist!*

a) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
b) $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$
c) Az $n \times n$-es valós nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ fölött. (Egy mátrix nyoma a diagonális elemeinek az összege.)
d) Az $n \times n$-es komplex nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ fölött.
e) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legföljebb 3-adfokú polinomok.
f) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legföljebb 3-adfokú szimmetrikus polinomok
g) Adott $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal felcserélhető 2×2-es valós mátrixok.

Megoldás: a) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ bázisa $\{1, i\}$, dimenziója 2.
b) $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ bázisa $\{1\}$, dimenziója 1.
c) Bázisa $\{E_{jk} \mid j \neq k\} \cup \{E_{11} - E_{kk} \mid k > 1\}$, dimenziója $n^2 - 1$.
d) Bázisa $\{E_{jk},\ iE_{jk} \mid j \neq k\} \cup \{E_{11} - E_{kk},\ iE_{11} - iE_{kk} \mid k > 1\}$, dimenziója $2n^2 - 2$.
e) Bázisa $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$, dimenziója 10..
f) Bázisa $\{1,\ x + y,\ x^2 + y^2,\ xy, x^3 + y^3,\ x^2y + xy^2\}$, dimenziója 6.
g) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$-ra

$$AX = XA \iff \begin{bmatrix} z & u \\ x - z & y - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x - y \\ u & z - u \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} z = y \\ u = x - y \end{matrix} \iff X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x - y \end{bmatrix}$$

Tehát a vektortér $\left\{ x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Ebből látható, hogy $\{I, A\}$ generátorrendszere ennek a vektortérnek, s mivel ezek nyilvánvalóan függetlenek, bázisa is. Következésképpen a vektortér dimenziója 2.

2. *Bizonyítsuk be az axiómákból, hogy egy vektortérben $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.*

Megoldás: Emlékeztetőül a vektortér-axiómák:

(A1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
(A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
(A3) $\exists \mathbf{0} :\ \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$
(A4) $\forall \mathbf{v} \in V\ \exists(-\mathbf{v}) : \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
(S1) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \quad \forall \lambda \in K,\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
(S2) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \mathbf{v} \in V$
(S3) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v}) \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \mathbf{v} \in V$
(S4) $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$

$\Leftarrow$: Az előadáson bizonyítottuk, hogy (*) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ minden $\mathbf{v} \in V$-re. Hasonlóan látható, hogy (**) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ minden $\lambda \in K$-ra, ugyanis

$$\mathbf{0} \overset{A4}{=} \lambda\mathbf{0}+(-\lambda\mathbf{0}) \overset{A3}{=} \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0})+(-\lambda\mathbf{0}) \overset{S1}{=} (\lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0})+(-\lambda\mathbf{0}) \overset{A2}{=} \lambda\mathbf{0}+(\lambda\mathbf{0}+(-\lambda\mathbf{0})) \overset{A4}{=} \lambda\mathbf{0}+\mathbf{0} \overset{A3}{=} \lambda\mathbf{0}.$$

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Mivel K test, $\exists\ \lambda^{-1}$, és ezzel

$$\mathbf{0} \overset{**}{=} \lambda^{-1}\mathbf{0} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v}) \overset{S3}{=} (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} \overset{T}{=} 1\mathbf{v} \overset{S4}{=} \mathbf{v},$$

ahol T testtulajdonságot jelöl.

3. *Tekintsük az X halmaz $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmazán értelmezett $K = \mathbb{Z}_2$ fölötti V vektorteret, ahol az összeadás az $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ szimmetrikus differencia.*

a) Bizonyítsuk be, hogy V valóban vektortér!
b) Adjunk meg V-ben egy bázist, ha X véges halmaz!
c) Bizonyítsuk be, hogy (végtelen X halmaz esetén is) van olyan $f : V_K \to K_K$ lineáris leképezés, amely X páros elemszámú véges részhalmazait 0-ba, a páratlanokat 1-be viszi!

Megoldás: a) A1 nyilvánvaló a definícióból. Az üreshalmaz megfelel $\mathbf{0}$-nak: $A \triangle \emptyset = A$ minden A-ra, és minden elem önmaga additív inverze: $A \triangle A = \emptyset$. Tehát A3 és A4 is igaz. $(A \triangle B) \triangle C$ elemei azok az $x \in X$ elemek, amelyek vagy A és B egyikében vannak, és nincsenek C-ben, vagy A és B közül páros sokban vannak benne, és C-ben is benne vannak. Azaz azok az x-ek, amelyek A, B, C közül páratlan sokban vannak benne. Ez viszont $A \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle A$-ra is igaz, így A2 is teljesül.
Mivel a skalárok csak 0 és 1, a skalárral való szorzást a $0 \cdot A = \emptyset$ és $1 \cdot A = A$ képletekkel definiálhatjuk. Ezekre nyilván teljesül az S1, S2, S3, ha a szereplő skalárok egyike 0, és $\lambda = \mu = 1$-re az S1, S3, S4 nyilvánvaló, S2 pedig következik abból, hogy $A \triangle A = \emptyset$.
Megj.: Az, hogy V vektortér, abból is belátható, hogy V-ből $\mathbb{Z}_2^X$-be művelettartó bijekciót ad az, ha minden A halmaznak azt a függvényt feleltetjük meg X-ből $\mathbb{Z}_2$-be, amely az A elemein 1-et, a többin 0-t vesz föl.

b) Az egyelemű részhalmazok bázist alkotnak, ugyanis két diszjunkt halmaz szimmetrikus differenciája az uniójuk, így az egyelemű részhalmazok generátorrendszert alkotnak véges X esetén, és függetlenek is, mivel a nemtriviális lineáris kombináció itt néhány (legalább egy) különböző egyelemű halmaz unióját jelenti, és ez nem lehet az üreshalmaz.

c) Az egyelemű részhalmazok itt is függetlenek ugyanúgy, mint véges X esetén. Ezt a független rendszert az órán tanult tétel szerint kibővíthetjük V bázisává. Az előírhatósági tétel szerint van olyan lineáris leképezés V-ből K_K-ba, amely az egyelemű halmazokat 1-be, a többi báziselemet 0-ba viszi, és ez nyilvánvalóan kielégíti a feladat feltételét.

4. *Adjuk meg az $f : (x, y, z) \to (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ lineáris leképezés márixát standard bázisban. Mennyi a rangja? Hány dimenziós f magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!*

Megoldás: A rangot, képteret és magteret is a mátrix (redukált) lépcsős alakjának a segítségével tudjuk meghatározni.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A rangja 2, mert a lépcsős alaknak két nemnulla sora van. Ebből következik, hogy a képtér 2-dimenziós, a magtér dimenziója pedig $3 - 2 = 1$. A képtér bázisa az A első két oszlopa, $\{(1, 1, 2, -1), (1, 0, 1, 0)\}$, mert a lépcsős alakban az első két oszlopban van vezérelem. A magtér bázisának meghatározásához az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldását kell felírni: $\mathbf{x} = (-t, 3t, t) = t(-1, 3, 1)$ $(t \in \mathbb{R})$, tehát a magtér bázisa $\{(-1, 3, 1)\}$.

5. *Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ az a leképezés, amelyre $f : p(x) \mapsto (x - 1)p'(x^2 + 1)$. Bizonyítsuk be, hogy f lineáris leképezés, és határozzuk meg a magját és a rangját! Írjuk fel a mátrixát a standard $\{1, x, x^2, \dots\}$ bázisokból álló bázispárban, illetve keressünk egy olyan bázispárt, amelyben a mátrixa $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú blokkmátrix!*

Megoldás: Ha $\deg p(x) \leq 2$, akkor $\deg p'(x) \leq 1 \Rightarrow \deg p'(x^2 + 1) \leq 2 \Rightarrow$
$\deg(x - 1)p'(x^2 + 1) \leq 3$, így f valóban $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$-ből $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$-ba képez. Lineáris, mert p, q polinomokra $(x-1)(p+q)'(x^2+1) = (x-1)(p'+q')(x^2+1) = (x-1)(p'(x^2+1)+q'(x^2+1)) = (x-1)p'(x^2+1) + (x-1)q'(x^2+1)$ és $c \in \mathbb{R}$-re $(x-1)((cp)'(x^2+1)) = (x-1)cp'(x^2+1) = c(x-1)p'(x^2+1)$.

A magja: $f(p(x)) = 0 \Leftrightarrow (x-1)p'(x^2+1) = 0$ mint polinom $\Leftrightarrow p'$ a 0 polinom $\Leftrightarrow p(x)$ konstans. Tehát a mag a konstans polinomokból álló egydimenziós altér, span(1), a rang pedig a dimenziótétel szerint $3-1=2$. A standard bázis elemeinek képe $f(1)=0$, $f(x)=x-1$ és $f(x^2)=(x-1)2(x^2+1)=2x^3-2x^2+2x-2$, ezért a leképezés standard mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az előírt alakú mátrixot úgy kapjuk meg, ha $\operatorname{Ker} f$ bázisát, $\{1\}$-et kiegészítjük $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bázisává, és $\mathcal{B}$-ben a kiegészítő elemek kerülnek előre: $\mathcal{B} = \{x, x^2, 1\}$, $\mathcal{C}$ pedig a kiegészítő elemek képeivel kezdődik, és azt egészítjük ki $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ bázisává,
például $\mathcal{C} = \{x-1,\ 2x^3-2x^2+2x-2,\ 1, x^2\}$. Ezzel a választással

$$[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. *Adjuk meg a következő lineáris transzformációk és leképezések mátrixát a megadott bázisban (vagy bázispárban)!*
Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!
a) $f(x,y,z) = (x+2y-z, x-y+z)$ *standard bázisban, illetve a* $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ *bázispárban, ahol a* $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ *és* $\mathcal{C}' = \{(1,1),(2,3)\}$.
b) az $x=t, y=2t, z=-t$ *tengely körüli* $90°$*-os forgatás a standard bázisban!*
c) a 2×2*-es valós mátrixokon az* $A \mapsto A + A^T$ *leképezés a standard bázisban!*
d) A $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ *vektortéren egy* $z = a+bi$ *komplex számmal való szorzás mátrixát a* $\mathcal{B} = \{1, i\}$ *és a* $\mathcal{B}' = \{1+i, 1-i\}$ *bázisban.*

Megoldás: a) $A = [f]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$Q = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{E}} = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[f]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = Q^{-1}AP =$
$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

A leképezés képtere és magtere az A mátrix oszloptere és nulltere, és ezek bázisa
$\{(1,1),(2,-1)\}$ (vagy akár $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, mivel a leképezés szürjektív), illetve $\{(-1,2,3)\}$.

b) Először egy kényelmes bázisban írjuk föl a mátrixot, aztán áttérünk a standard bázisra. Álljon a $\mathcal{B}$ bázis a tengely irányvektorából, $\mathbf{b}_1 = (1,2,-1)$-ből, és két erre és egymásra merőleges vektorból: mondjuk, a $\mathbf{b}_2 = (1,0,1)$ és a $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$-vel egyirányú $\mathbf{b}_3 = (1,-1,-1)$. Ekkor $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{b}_3$ és $\mathbf{b}_3 \mapsto -\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{b}_2$, így

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az áttérés $P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixa, és annak inverze:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ebből a standard mátrix $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{6\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6}+6 & -\sqrt{6}+12 \\ 2\sqrt{6}-6 & 4\sqrt{6} & -2\sqrt{6}-6 \\ -\sqrt{6}-12 & -2\sqrt{6}+6 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2+\sqrt{6} & -1+2\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 4 & -2-\sqrt{6} \\ -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

A forgatás izomorfizmus, ezért a képtere az egész $\mathbb{R}^3$, amelynek bázisa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, a magtere pedig $\{\mathbf{0}\}$, így annak a bázisa az üres halmaz, $\emptyset$.

c)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 & x_2+x_3 \\ x_2+x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, a standard $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ bázisban a koordinátavektorokon való hatás, és abból a transzformáció M mátrixa:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \\ 2x_4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A magtér azon mátrixokból áll, amelyekre $A^T = -A$ (ferdén szimmetrikus mátrixok), azaz

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

mátrixok, és ennek bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, a képtér pedig a szimmetrikus mátrixok ($A^T = A$ tulajdonságúak) altere, ugyanis $(A+A^T)^T = A^T+(A^T)^T = A^T+A = A+A^T$ miatt minden képvektor szimmetrikus mátrix, és minden szimmetrikus A mátrix előáll az $\frac{1}{2}A$ képeként. Tehát a képtér elemei az

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

mátrixok, és így a képtér bázisa

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

A magteret és a képteret kiszámíthatjuk a transzformáció mátrixából is:
$\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{N}(M)$, és
$\mathbf{v} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}(M)$.
Az M mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ebből $\mathcal{N}(M)$ bázisa $\{(0,-1,1,0)^T\}$, így $\operatorname{Ker} f$ bázisa $\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$, és $\mathcal{O}(M)$ bázisa $\{(2,0,0,0)^T,(0,1,1,0)^T,(0,0,0,2)^T\}$, amiből $\operatorname{Im} f$ bázisa $\left\{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\right\}$ (de persze az első és a harmadik elemet helyettesíthetjük az $\frac{1}{2}$-szeresükkel, és akkor az előző megoldásban megadott bázist kapjuk).

d) $(x+yi)(a+bi) = (ax-by)+(bx+ay)i$, tehát a standard mátrix az az A mátrix, amelyre $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax-by\\ bx+ay\end{bmatrix}$, így $A = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$. A $P = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ áttérési mátrixot használva, a transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}'$ bázis szerint

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

Ha $a+bi \neq 0$, akkor a transzformáció izomorfizmus (a mátrixból is látható, hogy invertálható, mert a determinánsa $a^2+b^2 \neq 0$), így a magtere 0, a képtere az egész $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, vagyis a magtér bázisa $\emptyset$, a képtéré $\{1, i\}$. Ha $a+bi = 0$, akkor a magtér $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ és a képtér 0.

7. *Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, melyre $f(1,1,0) = (1,0,1)$, $f(1,0,1) = (0,1,1)$ és $f(0,1,1) = (1,1,0)$. Adjuk meg f mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ bázisban és a standard bázisban is! Milyen vektorokat hagy helyben ez a leképezés? Mi az f mint geometriai transzformáció?*

Megoldás: Vegyük észre, hogy f hatása a $\mathcal{B}$ bázison $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_1$, így a $\mathcal{B}$-ben felírt B mátrixa, és abból a P áttérési mátrixszal kiszámított standard $A = PBP^{-1}$ mátrixa:

$$B = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Ez a leképezés az $(1,1,1)$ irányvektorú, origón átmenő tengely körüli $120°$-os, az irányvektor csúcsa felől nézve negatív irányú, forgatás (a $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ egységkocka origóval szomszédos három csúcsát permutálja ciklikusan, tehát az origóból induló testátló körüli forgatás). Csak a forgatás tengelyébe eső vektorokat, azaz az $(1,1,1)$ skalárszorosait hagyja helyben.