5 Variables aléatoires simultanées

Nous n'avons traité jusqu'ici que de distributions de variables isolées. Mais, il est souvent nécessaire de considérer des événements relatifs à deux variables simultanément, ou même à plus de deux variables. Considérons donc deux variables aléatoires ξ, η définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) ; nous parlons indifféremment d'un *couple aléatoire* (ξ, η) ou d'un *vecteur aléatoire à deux dimensions.*

Exemple:

- *Deux jets successifs d'un dé :*
  ξ *= le nombre obtenu lors du premier jet,*
  η *= le nombre obtenu lors du deuxième jet.*
- *Individu choisi au hasard dans une population :*
  ξ *= taille de l'individu,*
  η *= poids de l'individu.*
- *Inspection de soudures par point :*
  ξ *= résistance à l'arrachement,*
  η *= diamètre de la soudure.*

5.1 Définition des distributions simultanées

5.1.1 Fonction de répartition conjointe

On définit pour traiter de tels problèmes une *fonction* F *de répartition simultanée*, ou *conjointe* pour tout paire de variables aléatoires ξ et η :

$$F(a, b) = P(\xi < a, \eta < b) \qquad -\infty < a, b < \infty.$$

Propriétés :

- $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$
- $\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1$
- F est monotone croissante en tous les deux variables.

5.1.2 Fonction de répartition marginale

La fonction de répartition de ξ peut être déduite de la fonction de répartition conjointe de ξ est η comme suit :

$$F_\xi(a) = P(\{\xi < a\}) = P(\{\xi < a, \eta < \infty\}) = P(\lim_{b\to\infty}\{\xi < a, \eta < b\}) =$$
$$= \lim_{b\to\infty} P(\{\xi < a, \eta < b\}) = \lim_{b\to\infty} F(a, b).$$

et

$$F_\eta(b) = \lim_{a\to\infty} F(a, b).$$

Les fonctions F_ξ, F_η sont dites *fonctions de répartition (distribution) marginale* de ξ et η.

5.1.3 Universalité des fonctions simultanées

La probabilité de tous les événements simultanément relatifs à ξ et η peut théoriquement être calculée grâce aux fonctions conjointes.

$$\begin{aligned}
P(\xi \geq a,\ \eta \geq b) &= 1 - P(\{\overline{\xi \geq a,\ \eta \geq b}\}) = 1 - P(\{\overline{\xi \geq a}\} + \{\overline{\eta \geq b}\}) = \\
&= 1 - P(\{\xi < a\} + \{\eta < b\}) = \\
&= 1 - P(\{\xi < a\} - P(\{\eta < b\}) + P(\{\xi < a,\ \eta < b\}) = \\
&= 1 - F_\xi(a) - F_\eta(a) + F(a, b).
\end{aligned}$$

Exercice: Montrer que

$$\begin{aligned}
&P(a_1 \leq \xi < a_2,\ b_1 \leq \eta < b_2) = \\
&\quad = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_2, b_1)
\end{aligned}$$

sous les conditions :

$$a_1 < a_2, \qquad b_1 < b_2.$$

5.2 Couples aléatoires discrètes

Soient donc ξ et η deux variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace probabilisé (Ω, P), les ensembles de leurs valeurs étant

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \quad \text{et} \quad \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

La *loi* de *probabilité jointe* des deux variables aléatoires ou *la distribution bidimensionnelle* du vecteur aléatoire (ξ, η) est alors définie par les probabilités p_{ij} affectées aux points (x_i, y_j) :

$p_{ij} = P(\xi = x_i,\ \eta = y_j)$; c'est une loi de probabilité discrète définie sur l'espace produit. Il est commode de représenter les valeurs p_{ij} par un tableau à double entrée ; il va de soi que $\sum_{ij} p_{ij} = 1$.

Si l'on s'intéresse uniquement au comportement de l'une des deux variables, ou introduit les *distributions marginale*, ξ et η définies par

$$p_i = P(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}$$
$$p_j = P(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

on les reporte respectivement dans la dernière colonne et dans la dernière ligne, c'est-á-dire "en marge" du tableau représentatif de la distribution bidimensionnelle.

Exemple: (jets d'une pièce de monnaie) *Considérons une expérience stochastique qui consiste à jeter trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée ; soient*

- ξ *= nombre de "face"*
- η *= numéro du jet dans lequel apparaît "face" pour la première fois.*

ξ \ η	1	2	3	4	$P(\xi = x_i)$
0	0	0	0	1/8	1/8
1	1/8	1/8	1/8	0	3/8
2	1/4	1/8	0	0	3/8
3	1/8	0	0	0	1/8
$P(\eta = y_j)$	1/2	1/4	1/8	1/8	1

Exercice: On sait que 15% des familles d'une certaine localité n'ont pas d'enfant, 20% d'entre elles en ont 1, 35% en ont 2 et 30% en ont 3. On sait de plus que pour chaque famille un enfant a autant de chances d'être un garçon qu'une fille, indépendamment du sexe de ses frères et sœurs. Donner la loi de probabilité conjointe et le nombre de garçons d'une famille choisie au hasard, et le nombre de filles dans cette famille.

5.3 Couples aléatoires continues

Le cas où les deux variables sont continues se traite facilement par analogie au cas précédent, en remplaçant les sommations par des intégrales. Les variables ξ et η sont dites *conjointement continues* s'il existe une fonction f de deux arguments réels ayant pour tout sous-ensemble C du plan la propriété suivante :

$$P((\xi,\eta)\in C)=\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où la *densité de probabilité jointe* $f(x,y)$ est une fonction réelle telle que

1. $f(x,y)\geq 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$

On constate que la probabilité d'un événement consistant en seul point est toujours nulle. Graphiquement, la fonction $z=f(x,y)$ représente une surface qui, avec le plan (x,y), défini un volume égal à un, en accord avec la propriété 2 ci-dessus. La probabilité pour que ξ soit comprise entre a et b, alors que η est comprise entre c et d, est représentée mathématiquement par

$$P(a\leq\xi<b,\ c\leq\eta<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Notons encore que la loi de probabilité d'un couple aléatoire (ξ,η) peut également être décrite par la fonction de répartition jointe.

$$F(x,y)=P(\xi<x,\ \eta<y).$$

Dans ce cas la fonction de distribution jointe de ξ et η est définie par :

$$F(x,y)=P(\xi<x,\ \eta<y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

il suffit de dériver pour obtenir

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

pour autant que les dérivées partielles soient définies. Enfin, si ξ et η sont des variables aléatoires conjointement continues, alors elles sont individuellement continues, également. On obtient leurs *densités marginales* ainsi :

$$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

et

$$P(\eta < y) = F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

Exemple: *Considérons la fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \textit{si } 0 < y < x,\ 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit effectivement d'une densité jointe et faire un croquis de la surface $z = f(x,y)$.

Par des intégration élémentaires, on obtient les densités marginales

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 2 - 2y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Considérons l'événement $A = \{\xi \geq 2\eta\}$; sa probabilité est donné par

$$P(A) = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}x} 2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1/2,$$

qui est $2 \cdot$ aire de A puisque A étant décrit graphiquement par le triangle rectangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1/2)$.

Exemple: (loi de probabilité binomiale) *La densité de probabilité d'un couple aléatoire est donnée par*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-(x^2 + y^2)/2] \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour vérifier que $f(x,y)$ est une densité de probabilité jointe ($\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$) on effectue une transformation en coordonnées polaires.

Les deux densités marginales s'expriment par :

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-x^2/2] \quad \text{et par} \quad f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y^2/2].$$

5.4 Indépendance de deux variables aléatoires

La notion d'indépendance stochastique joue un rôle fondamental en calcul des probabilités. Nous avons défini l'indépendance de deux événements. Si ξ et η sont maintenant deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, il est naturel de dire que ces deux variables sont *stochastiquement indépendantes* si tout événement défini par la seule variable ξ est indépendant de tout événement défini par la seule variable η. On peut montrer, en s'appuyant sur les trois axiomes de la théorie des probabilités que ξ et η sont indépendantes si et seulement si pour tout couple a, b de réels

$$P(\xi < a,\ \eta < b) = P(\xi < a)P(\eta < b)$$

ce qui revient à écrire que ξ et η sont indépendantes si $F(a, b) = F_\xi(a) \cdot F_\eta(b)$. Dans le cas discrèt il en résulte que ξ et η sont indépendantes si $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ pour tout i, j. Dans le cas continu le critère d'indépendance sera $f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$ pour tout x et y.

Démonstration:

1. Supposons que ξ et η sont indépendantes. Alors
$$f(x, y) = [F(x, y)]'' = [F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)]''_{x,y} = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y).$$
2. Mais si $f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$ alors
$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\, \mathrm{d}u \cdot \int_{-\infty}^{y} f_\eta(v)\, \mathrm{d}y = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y).$$

Intuitivement parlant, on pourra donc dire que ξ et η sont indépendantes si le fait de connaître la valeur de l'une n'influe pas sur la distribution de l'autre. Des variables que ne sont pas indépendantes sont dites *dépendantes*.

Exemple: *Un homme et un femme se donnent rendez-vous. L'heure d'arrivée de chacune de ces deux personnes sur les lieux du rendez-vous est une variable aléatoire uniforme entre midi et une heure. Ces deux variables sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la première arrivée doive attendre plus de 10 minutes ?*

Réponse: Désignons par ξ et η respectivement l'écart entre midi et l'arrivée de l'homme ou de la femme. ξ et η sont alors des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans l'intervalle $(0, 60)$. La probabilité cherchée, à savoir $P(\xi+10 < \eta)+P(\eta+10 < \xi)$, est par symétrie égale à $2P(\xi+10 < \eta)$. On l'obtient ainsi :

$$2P(\xi + 10 < \eta) = 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} \left(\frac{1}{60}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{25}{36}.$$

5.5 Moments d'un couple aléatoire, covariance

Soit (ξ, η) un couple aléatoire continu de densité $f(x, y)$. Les espérances mathématiques de ξ et η sont alors définies par

$$\mu_\xi = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et par

$$\mu_\eta = E(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

L'équivalence des intégrales simples et doubles dans les relations ci-dessus est une conséquence de la définition des densités marginales $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$. De manière générale, considérons la variable aléatoire continue $Z = g(\xi, \eta)$ où $g(x, y)$ est une fonction réelle définie dans $\mathbb{R}^2$. L'espérance mathématique de Z est alors donnée par

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad f(x,y) \quad \text{est la densité.}$$

Ce résultat est d'une grande utilité ; il signifie que si l'on s'intéresse qu'à l'espérance mathématique de Z, on n'a pas besoin de chercher la distribution de cette variable aléatoire.

1. La somme de variables aléatoires
   Soit $Z = \xi + \eta$, on trouve

$$\begin{aligned} E(Z) = E(\xi+\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = E(\xi) + E(\eta). \end{aligned}$$

   Exemple: *Une tension aléatoire ξ variant entre 0 et 4 volts et uniformément répartie sur cet intervalle. On suppose que le signal ξ est perturbé par un bruit aléatoire indépendante η, uniformément distribue entre 0 et 1 volt. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la tension du signal bruité $\xi + \eta$.*

   Réponse: On a

$$E(\xi+\eta) = E(\xi) + E(\eta) = 2 + 0.5 = 2.5.$$

Si on admet que ξ et η sont indépendantes alors

$$\mathrm{Var}\,(\xi+\eta) = \mathrm{Var}\,(\xi) + \mathrm{Var}\,(\eta) = 16/12 + 1/12 = 1.42.$$

Les résultats exposés ci-dessus se généralisent sans autre au cas d'une combinaison linéaire de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. On vérifie en effet que

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(\xi_k).$$

2. La différance de variables aléatoires
Soit $Z = \xi - \eta$. Alors

$$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta).$$

3. Ainsi que *le moment mixte* d'ordre deux :

$$E(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Remarque: La transposition des raisonnements au cas discrèt ne posera aucun problème.

4. *Le moment centré* correspondant appelé *covariance* de ξ et de η est noté $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)$:

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = E[(\xi-\mu_\xi)(\eta-\mu_\eta)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_\xi)(y-\mu_\eta) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Comme dans le cas des variances, lors des calculs il est utile d'employer l'expression

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Propriétés de la covariance
- $\mathrm{Cov}\,(\xi,\xi) = \mathrm{Var}\,(\xi)$
- $\mathrm{Cov}\,(a\xi_1 + b\xi_2, \eta) = a\,\mathrm{Cov}\,(\xi_1,\eta) + b\,\mathrm{Cov}\,(\xi_2,\eta)$
- $\mathrm{Cov}^2(\xi,\eta) \leq \mathrm{Var}\,(\xi)\cdot\mathrm{Var}\,(\eta)$
- $\mathrm{Var}\,(\xi \pm \eta) = \mathrm{Var}(\xi) + \mathrm{Var}\,(\eta) \pm 2\,\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)$.
- Si ξ et η sont des variables aléatoires indépendantes alors $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = 0$.

L'inverse du théorème n'est pas nécessairement vrai.

Exemple: *ξ et η sont variables aléatoires suivantes, ξ est telle que*

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{3}$$

et on défini η par rapport à ξ

$$\eta = \begin{cases} 0 & si\ \xi \neq 0 \\ 1 & si\ \xi = 0. \end{cases}$$

Or $\xi \cdot \eta$ est clairement nulle, donc $E(\xi \cdot \eta) = 0$ aussi. Comme $E(\xi)$ l'est aussi, il reste

$$Cov\,(\xi, \eta) = 0.$$

Montrer que ξ et η ne sont pas indépendantes.

5.6 Dépendance stochastique de deux variables aléatoires

L'importance de la notion de covariance de deux variables aléatoires réside dans le fait qu'elle permet dans une certaine mesure de caractériser numériquement leur dépendance stochastique.

Si la covariance d'un couple de variables aléatoires est positive, ces deux variables ont tendance à varier dans le même sens. Ceci signifie que si ξ prend par exemple une valeur plus grande que $E(\xi)$, alors η tend à prendre également des valeurs plus grandes que $E(\eta)$. L'inconvénient de la covariance tient au fait que, selon la forme de la densité $f(x, y)$, elle peut devenir en valeur absolue arbitrairement grande, ce qui la rend inutilisable pour mesurer le degré de dépendance entre ξ et η. Pour des besoins pratiques la covariance est donc remplacée par une mesure "standardisée", *le coefficient de corrélation* de ξ et η, défini par $\rho(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)/\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta$ où σ_ξ, σ_η sont les écarts types des deux variables.

Propriétés

- $-1 \leq \rho(\xi, \eta) \leq 1$,
- $\rho(\xi, \eta) = 0$ si ξ et η sont indépendantes,
- $\rho(\xi, \eta) = 1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$ avec $a > 0$,
- $\rho(\xi, \eta) = -1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$ avec $a < 0$,
- Si l'on pose $U = a\xi + b$ et $V = c\eta + d$ avec $a, c > 0$, alors $\rho(\xi, \eta) = \rho(U, V)$.

De manière générale, on peut affirmer que plus $|\rho(\xi, \eta)|$ est proche d'un, plus dépendance linéaire entre ξ et η sera forte. Insistons cependant sur le fait que même une corrélation proche de $+1$ ou de -1 ne permet pas de conclure qu'il existe une relation de cause à effet entre les deux grandeurs considérées.

Exemple: *Reprenons l'exemple du paragraphe 5.3.*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < y < x,\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

On vérifie que

$$\begin{array}{lll} E(\xi) = 2/3 & E(\eta) = 1/3 & \\ E(\xi^2) = 1/2 & E(\eta^2) = 1/6 \quad \text{et} & E(\xi\eta) = 1/4. \end{array}$$

Il en résulte que

$$\begin{array}{ll} \text{Var}\ (\xi) = 1/18, & \text{Var}\ (\eta) = 1/18, \\ \text{Cov}\ (\xi, \eta) = 1/36, & \rho(\xi, \eta) = 1/2. \end{array}$$

5.7 Distributions conditionelles

5.7.1 Cas discret

Nous savons que, pour tout paire d'événements A et B, la probabilité de A sous condition que B soit réalisé est, pour autant que $P(B) > 0$,

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Il est naturel à partir de la *loi de probabilité de ξ sous la condition $\eta = y$* :

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = P(\xi = x \mid \eta = y) = \frac{P(\xi = x,\ \eta = y)}{P(\eta = y)} = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)}$$

pour tous les cas où $p_\eta(y) > 0$.

On définit également la *fonction de répartition conditionnelle* de ξ, sachant que $\eta = y$, pour autant que $p_\eta(y) > 0$ toujours :

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = P(\xi < x \mid \eta = y) = \sum_{a<x} p_{\xi|\eta}(a \mid y).$$

Remarque: Lorsque ξ et η sont indépendantes, les lois conditionnelles et non conditionnelles sont identiques.

Exemple: *La loi conjointe de probabilité* $p(x,y)$ *de deux variables* ξ *et* η *est donnée ainsi :*

$$p(0,0) = 0.4, \qquad p(0,1) = 0.2, \qquad p(1,0) = 0.1, \qquad p(1,1) = 0.3.$$

Trouver la loi conditionnelle de ξ lorsque $\eta = 1$.

Réponse: On calcul tout d'abord

$$p_\eta(1) = \sum_x p(x,1) = 0.5.$$

Ainsi

$$p_{\xi|\eta}(0 \mid 1) = \frac{p(0,1)}{p_\eta(1)} = \frac{2}{5} \qquad p_{\xi|\eta}(1 \mid 1) = \frac{p(1,1)}{p_\eta(1)} = \frac{3}{5}.$$

L'espérance conditionnelle de ξ sous la condition $\eta = y$

$$E(\xi \mid \eta = y) = \sum_x xP(\xi = x \mid \eta = y) = \sum xp_{\xi|\eta}(x \mid y).$$

5.7.2 Cas continu

Soient ξ et η des variables de densité conjointe $f(x,y)$. On définit la *densité conditionnelle* de ξ sous la condition $\eta = y$, et lorsque $f_\eta(y) > 0$ par la relation

$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}.$$

L'usage de ces densités conditionnelles rend possible le calcul de probabilités d'événements relatifs à une variable, sous condition qu'une seconde ait pris une valeur connue. Soient ξ et η conjointement continues et pour tout valeur a

$$p(\xi < a \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{\xi|\eta}(x \mid y)\, \mathrm{d}x.$$

La fonction de répartition conditionnelle de ξ sous la condition $\eta = y$

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = P(\xi < x \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi|\eta}(u \mid y)\, \mathrm{d}u.$$

Exemple: *Soient ξ et η des variables ayant pour densité conjointe*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y) & \textit{si } 0<x<1 \textit{ et } 0<y<1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Chercher la densité conditionnelle de ξ sachant que $\eta = y$.

Réponse: Lorsque $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$

$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x} = \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3} - y/2}.$$

Pour deux variables ξ et η conjointement continues de densité $f(x,y)$, la densité conditionnelle de ξ, sachant que $\eta = y$ est définie – pour autant que $f_\eta(y) > 0$ – par

$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}.$$

Il est donc naturel de définir l'espérance conditionnelle de ξ, dans le cas continu et sous la condition $\eta = y$, par $E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x \mid y)\,\mathrm{d}x$ pour les valeurs de y telles que $f_\eta(y) > 0$.

On peut définir la *variance conditionnelle* de ξ selon η. On obtient en fin de compte la variable aléatoire :

$$\mathrm{Var}\,(\xi \mid \eta) = E[(\xi - E(\xi \mid \eta))^2 \mid Y]$$

mais cette égale à

$$\mathrm{Var}\,(\xi \mid \eta) = E(\xi^2 \mid \eta) - (E(\xi \mid \eta))^2.$$

5.8 Convolution

Il est très souvent nécessaire de déterminer la distribution de la somme $\xi + \eta$ de deux variables aléatoires indépendantes en se basant sur leurs distributions marginales. Supposons que ces distributions soient données par les densités $f_\xi(x)$ et $f_\eta(y)$. Soit $Z = \xi + \eta$, alors

$$\begin{aligned} F_Z(a) = P(\xi + \eta < a) = \iint_{x+y<a} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a-y} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right) f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(a-y)\cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$f_Z(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(a-y) \cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}y$$

en inversant l'ordre d'intégration, on obtient également

$$f_Z(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(a-x) \cdot f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une intégrale définie cette forme est appelée *intégrale de convolution* des fonctions f_ξ et f_η notée $f_\xi * f_\eta$. On démontre sans difficulté que le produit de convolution a les propriétés suivantes :

- $f_\xi * f_\eta = f_\eta * f_\xi$
- $(f_\xi * f_\eta) * f_u = f_\xi * (f_\eta * f_u)$
- $f_\xi * (f_\eta + f_u) = f_\xi * f_\eta + f_\xi * f_u$.

Remarque: Dans le cas des variables aléatoires discrètes, l'intégrale de convolution sera évidemment remplacée par une "somme de convolution". Si nous admettons par exemple que les variables discrètes ξ et η prennent chacune les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ on a

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k,\ \eta = n-k).$$

Exemple: *Soient ξ et η deux variables aléatoires uniformes sur* $(0,1)$ *et indépendantes. Donner la densité de $\xi + \eta$.*

Réponse: Nous savons que

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En applicant le résultat précédé, on peut écrire

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_0^1 f_\xi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour $0 < x < 1$, on obtient

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_0^x \mathrm{d}y = x,$$

tandis que pour $1 < a < 2$, on aura

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{x-1}^{1} \mathrm{d}y = 2 - x.$$

Ainsi

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} x & 0 < a < 1 \\ 2 - x & 1 < a < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.9 Changements des variables

Etant données des distributions de probabilités d'une ou plusieurs variables aléatoires, il est souvent intéressant de trouver d'autres distributions d'autres variables aléatoires qui en dépendent d'une manière donnée spécifique.

Soient ξ_1 et ξ_2 conjointement continue de densité $f_{\xi\eta}$. On s'intéresse à la densité conjointe η_1 et η_2, deux fonctions de ξ_1 et ξ_2, ($\eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2)$ et $\eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2)$). Admettons encore que les fonctions g_1 et g_2 satisfassent les deux conditions suivantes :

- on peut résoudre par rapport à x_1 et x_2 des systèmes d'équations $y_1 = g_1(x_1, x_2)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2)$,
- les fonctions g_1 et g_2 sont continûment différentiables et déterminant de Jacobien partout non nul. Ou Jacobien s'exprime :

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0$$

pour tout couple (x_1, x_2).

Sous ces conditions les variables aléatoires η_1 et η_2 sont conjointement continues et de densité

$$f_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2) = f_{\xi_1\xi_2}(x_1 x_2) \cdot |J(x_1, x_2)|^{-1}$$

Calculer

$$P(\eta_1 < y_1,\ \eta_2 < y_2) = \iint\limits_{\substack{(x_1,x_2) \\ g(x_1,x_2)<y_1 \\ g_2(x_1,x_2)<y_2}} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$