I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $z = f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 6xy$, milyen jellegű stacionárius pont az origó?

(2) Mennyi $f(x,y) = \exp\left(-x^2 - 2xy - 2y^2\right)$ integrálja a teljes $\mathbb{R}^2$ síkra?

(3) Mi $\frac{1}{1-2x}$ hatványsora és annak konvergenciasugara?

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

1. Integrálja az $f(x,y) = (x+y)^4(x-y)^2$ függvényt az $|x-1| + |y-2| \le 1$ tartományon! (Lineáris transzformáció.)
2. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény hatványsorát az $x_0 = e^2$ körül és a sorfejtés konvergenciatartományát!
3. Számítsa ki $\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)2^k}$ értékét 0,1 pontossággal. Adjuk meg a pontos értéket is!
4. Adja meg a $\sum_0^{+\infty} \frac{k\cos(k\pi)x^k}{2^{2(k-1)}}$ sor konvergencia ill. abszolútkonvergencia-tartományát. Hol egyenletesen konvergens? Számítsa ki a sor összegét is!
5. (a) Fejtsük Fourier sorba az $f(x) = \left\{\frac{x}{\pi}\right\}$ ha $|x| \le \pi$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$, 2π szerint periodikus függvényt! (Itt $\{y\}$ az y törtrészét jelöli.)
   (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \cdots = ?$
   (c) Mit tud a sor pontonkénti konvergenciájáról?
6. (a) Fejtsük Fourier sorba az
   $$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{ha } 0 \le x < \pi, \\ -f(-x), & \text{ha } -\pi \le x < 0, \end{cases}$$
   $f(x + 2k\pi) = f(x)$ $(k \in \mathbb{Z})$, 2π szerint periodikus függvényt. (Azaz állítsuk elő $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ alakban.)
   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)^3} = ?$
7. γ görbe a komplex síkon a $[0, \sqrt{2}]$ szakaszból és a 0 középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körnek a $\sqrt{2}$ és $1+i$ pontokat összekötő ívéből áll. Mennyi $\int_\gamma \bar{z} + \cos z \, dz$ valós része?
8. Hol differenciálható az $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ komplex függvény? Van-e neki primitív függvénye? Adjuk meg $\int_\gamma f(z)\, dz$ értékét, (a) ha γ az origó körüli 2 sugarú kör pozitív irányítással, (b) ha γ az origó körüli 2 sugarú kör, Re $z > 0$ íve pozitív irányítással.
9. Tekintsük $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ függvénysorozatot. (a) Adja meg a függvénysorozat konvergencia tartományát, határfüggvényét és döntse el, hogy a sorozat egyenletesen konvergál-e?! (b) Válaszolja meg ugyanezen kérdéseket a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorra!
10. (*) Legyen $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$, $x \in (0, \infty)$. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x)$ függvénysorozat minden $x \in (0, \infty)$ esetén konvergens. Mi a határfüggvény? Egyenletes-e a konvergencia? Ha nem, akkor keressünk minél nagyobb intervallumot, amelyre megszorítva a függvényeket a konvergencia egyenletes.