Fizikus BSc képzés, többváltozós analízis mintavizsga (2).

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ függvény $(x_0, y_0) = (3, 2)$ ponthoz tartozó érintősíkja?

(2) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$; mennyi $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ a $(-1, 2, 3)$ pontban?

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 3, -1 \le y \le 3\}$, $\rho(x, y) = 1$ sűrűségű síklemez origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

(4) $\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos t\mathbf{i} + e^{-t} \sin t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $0 \le t < +\infty$ térgörbe ívhossza?

(5) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$; $\iint_F \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+2+3+3=10 pont.

1. Mondjuk ki az implicitfüggvény-tételt! (Elég az egyváltozós esetben.)
2. Mit értünk az alatt, hogy egy felület irányítható? Mondjunk példát nem irányítható felületre!
3. Mondjuk ki a Stokes tételt és a Green tételt! Vezessük le az előbbiből az utóbbit!
4. Legyen $f \in L^2[0, 2\pi)$, amit a teljes számegyenesre 2π periodikusan terjesztünk ki, és legyen $S_N f$ az f függvény N-dik Fourier közelítése. Milyen értelemben teljesül $S_N f \to f$? Milyen további feltételek garantálják a (i) pontonkénti illetve az (ii) egyenletes konvergenciát?

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

Fizikus BSc képzés, többváltozós analízis mintavizsga (2).

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ függvény $(x_0, y_0) = (3, 2)$ ponthoz tartozó érintősíkja?

(2) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$; mennyi $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ a $(-1, 2, 3)$ pontban?

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 3, -1 \le y \le 3\}$, $\rho(x, y) = 1$ sűrűségű síklemez origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

(4) $\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos t\mathbf{i} + e^{-t} \sin t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $0 \le t < +\infty$ térgörbe ívhossza?

(5) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$; $\iint_F \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+2+3+3=10 pont.

1. Mondjuk ki az implicitfüggvény-tételt! (Elég az egyváltozós esetben.)
2. Mit értünk az alatt, hogy egy felület irányítható? Mondjunk példát nem irányítható felületre!
3. Mondjuk ki a Stokes tételt és a Green tételt! Vezessük le az előbbiből az utóbbit!
4. Legyen $f \in L^2[0, 2\pi)$, amit a teljes számegyenesre 2π periodikusan terjesztünk ki, és legyen $S_N f$ az f függvény N-dik Fourier közelítése. Milyen értelemben teljesül $S_N f \to f$? Milyen további feltételek garantálják a (i) pontonkénti illetve az (ii) egyenletes konvergenciát?

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.
HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.
Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 8+12+9+11=40 pont.**

1. Keressük meg és osztályozzuk a stacionárius pontokat: $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$.

2. Tekintsük a $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x-y)\mathbf{i} + (zx^2-y)\mathbf{j} + (2xy+z)\mathbf{k}$ vektormezőt.
   (a) Jelölje F az $x^2+y^2=1,\ z=0$ alapkörű, $(0,0,1)$ csúcspontú kúppalástot kifelé mutató felületi normálissal. $\iint\limits_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{f} = ?$ (Figyelem, F nem a teljes kúpfelület, csak a palást.)
   (b) Jelölje γ az $x^2+y^2=1,\ z=0$ körvonalat pozitív körüljárással. $\int\limits_\gamma \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = ?$

3. Számítsa ki $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^4}\,dx$, $\frac{\pi}{6}$ értékét $0,01$ pontossággal.

4. Határozzuk meg azt az $u(t,x)$; $t \geq 0$; $0 \leq x \leq 1$ függvényt, melyre: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(t,0) = u(t,1) = 0\ \forall t \geq 0$; és $u(0,x) = \sin(\pi x)\cdot\cos(2\pi x) + x(1-x)$ ha $0 \leq x \leq 1$.
   (*Útmutatás*: keressük a megoldást $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-k^2\pi^2 t}\cdot \sin(k\pi x)$ alakban.)

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.
HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.
Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 8+12+9+11=40 pont.**

1. Keressük meg és osztályozzuk a stacionárius pontokat: $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$.

2. Tekintsük a $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x-y)\mathbf{i} + (zx^2-y)\mathbf{j} + (2xy+z)\mathbf{k}$ vektormezőt.
   (a) Jelölje F az $x^2+y^2=1,\ z=0$ alapkörű, $(0,0,1)$ csúcspontú kúppalástot kifelé mutató felületi normálissal. $\iint\limits_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{f} = ?$ (Figyelem, F nem a teljes kúpfelület, csak a palást.)
   (b) Jelölje γ az $x^2+y^2=1,\ z=0$ körvonalat pozitív körüljárással. $\int\limits_\gamma \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = ?$

3. Számítsa ki $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^4}\,dx$, $\frac{\pi}{6}$ értékét $0,01$ pontossággal.

4. Határozzuk meg azt az $u(t,x)$; $t \geq 0$; $0 \leq x \leq 1$ függvényt, melyre: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(t,0) = u(t,1) = 0\ \forall t \geq 0$; és $u(0,x) = \sin(\pi x)\cdot\cos(2\pi x) + x(1-x)$ ha $0 \leq x \leq 1$.
   (*Útmutatás*: keressük a megoldást $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-k^2\pi^2 t}\cdot \sin(k\pi x)$ alakban.)

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.