Matematika szigorlat mérnököknek   Írásbeli gyakorló példasor 5.

1. Írjuk fel $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-1}$$
egyenesre való vetítés mátrixát! Adjuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, a mátrix rangját és determinánsát!

2. Határozzuk meg az $f_n(x) = \frac{nx^2}{4+n^3x^3}$ pontonkénti limeszfüggvényét a $(-\infty, \infty)$-en, ha létezik. Egyenletes-e a konvergencia ezen az intervallumon?

3. Adjuk meg az $xy' - y = xy^3 \ln x$ differenciálegyenlet általános megoldását. (*Útmutatás*: alkalmazzunk megfelelő helyettesítést!)

4. Határozzuk meg $\int\limits_{-\infty}^{0,2} e^{-x^2/2}\, dx - \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ értékét 0.0001 pontossággal, egy alkalmas hatványsor segítségével. (*Útmutatás*: Használjuk, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, és $e^{-x^2/2}$ páros függvény.) Adjuk meg a hatványsor konvergenciatartományát is!

5. Határozzuk meg $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (z^2 + x)\mathbf{i} + (1 - \frac{1}{z})\mathbf{j} + (\frac{y}{z^2} + 2z + 2xz)\mathbf{k}$ vektormező vonalintegrálját, a $(2, 2, 1)$ pontból a $(4, 1, 1)$ pontba mutató egyenesszakasz mentén kétféleképpen (az egyenes szakaszt paraméterezve ill. potenciálfüggvény segítségével)!

6. Rajzolja le az $\dot{x} = x - y^2 + 4, \quad \dot{y} = x + y + 2$ autonóm diff.egyenletrendszer lokális fázisképét az egyensúlyi helyzetek közelében, és vizsgálja az egyensúlyi helyzeteket stabilitás szempontjából! Mindkét egyensúlyi pont esetén adja meg a linearizált rendszer általános valós megoldását!