Matematika szigorlat mérnököknek   Írásbeli gyakorló példasor 4.

1. Határozzuk meg a
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit.

2. Keressük meg a $0 \le x < \infty$; $0 \le y \le e^{-\sqrt{x}}$ egyenlőtlenségekkel definiált (végtelen) tartomány súlypontjának koordinátáit (homogén tömegeloszlást feltételezve).

3. Határozzuk meg az $(1 - xy)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$ differenciálegyenletnek az $(x_0, y_0) = (1, 4)$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását. (*Útmutatás:* Keressünk integrálótényezőt $\mu(x)$ alakban.)

4. Határozza meg az $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ körhenger által az $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ gömbből kimetszett test térfogatát! (Ötlet: használja a szokásos hengerkoordinátákat.)

5. Határozza meg $f(x) = 1 + \sin x \cos^2 x$, $0 \le x \le \pi$ tisztán szinuszos Fourier-sorát.

   (+) Ez alapján oldja meg az $u'_t = u''_{xx}$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $u(0,x) = f(x)$, $t > 0$, $x \in (0,\pi)$ egyenletet.

6. (a) Oldjuk meg:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} &= 2x - y - 2\cos t; \qquad x(0) = 6,\ y(0) = 5. \end{aligned}$$

   (b) Rajzoljuk le a differenciálegyenletrendszer homogén részének fázisképét (kezdeti feltétel nélkül), és vizsgáljuk az egyensúlyi pont stabilitását.