

Matematika szigorlat mérnököknek Írásbeli gyakorló példasor 2.

1. Keressünk olyan \mathbf{Q} ortogonális és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ alakba írható, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Határozza meg az $\ddot{x} + \dot{x} = \frac{1}{1+e^x}$ egyenlet általános megoldását!

3. (a) Határozzuk meg az $x + y + z = 3$, $x - y + z = 5$ síkok metszetének origótól való távolságát kétféleképpen (a metszet egyenest paraméterezve illetve Lagrange-multiplikátor módszerrel).

(b) Az $x - y + z = 5$ sík mely pontja van az origóhoz legközelebb?

(c) Adjuk meg az origó középpontú és az $x - y + z = 5$ síkot érintő gömb egyenletét!

4. Számoljuk ki a $1 \leq 2x - x^2 + y - \frac{y^2}{4}$ egyenlőtlenség által definiált, homogén tömegeloszlású ($\rho(x, y) \equiv 1$), síklemeznek az origóra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát.

5. Határozza meg, hogy konvergensek, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok (állításait indokolja). Konvergencia esetén számítsa ki az összeget 0.1 pontossággal.

$$a) \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \cdot (\sqrt{9k^2 + 1} - 3k) \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^2} \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$$