Matematika szigorlat mérnököknek   Írásbeli gyakorló példasor 1.

1. (a) Adjuk meg a $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ integrál értékét legfeljebb 0.01 hibával!

   (b) Határozzuk meg az $f(x) = \int_0^{2x} ln(1+t^2)\,dt$ függvény origó körüli hatványsorát! Milyen x-re lesz ez a sor konvergens illetve abszolút konvergens?

2. R belső sugarú, l hosszúságú, kör keresztmetszetű csőben $p_2 - p_1$ nyomáskülönbség hatására kialakuló áramlás sebessége $v(r)$, ahol r a henger alakú cső középvonalától vett távolság. Határozzuk meg a $v(r)$ függvényt az alábbi differenciálegyenlet alapján, figyelembe véve, hogy a fallal érintkező $(r = R)$ folyadékréteg nyugalomban van, és hogy $v(r)$ mindenütt véges:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = -\frac{p_2 - p_1}{l\eta}$$

   ahol η egy a folyadékra jellemző surlódási együttható.

3. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 5 \\ 2x + 4y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

   egyenletrendszer összes optimális megoldását a minimális abszolút értékűvel kifejezve!

4. Tekintsük az $\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormezőt, ahol $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, és $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ felületi integrálját az $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ felületre, valamint vonalintegrálját az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,, z = 2$ görbére.

5. Tekintsük az $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -2x + ay$ differenciálegyenlet-rendszert, ahol a valós paraméter. (a) Írjuk fel az általános megoldást az $a = -2$, valamint az $a = 3$ esetben, adjuk meg az egyensúlyi pont típusát, és vázoljuk a fázisképet. (b) Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter minden értéke mellett keressük meg az izolált egyensúlyi pontokat, és vizsgáljuk azokat Ljapunov-stabilitás és asszimptotikus stabilitás szempontjából. (c) Az a paraméter mely értékére kapunk csomót? És fókuszt?

6. Korlátos-e a $\cos^2 z$ függvény az $\mathrm{Im}\ z \geq 0$ félsíkon? Állításunkat indokoljuk!