1

Th.

Soit A une matrice $m \times n$ (c.à.d $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

Soit $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, soit $\underline{b} \neq \underline{0}$.

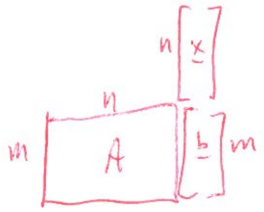
Alors les solutions du système homogène linéaire

(H) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ forment toujours un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Les solutions du système inhomogène linéaire

(IH) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ne forment jamais un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si $\underline{b} \neq \underline{0}$

Preuve: partie 1. i) $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ est une sol. de (H)



ii) si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des sol. de (H)

alors $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A}}(\underline{x}+\underline{y}) = 0$

donc $\underline{x+y}$ est aussi une sol de (H)

iii) si $\underline{x}$ est une sol de (H), alors $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\underline{\underline{A}}(\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$

donc $\lambda \underline{x}$ est aussi une sol de (H).

partie 2. $\underline{\underline{A}}\,\underline{0} = \underline{0} \neq b$ donc $\underline{0}$ n'est pas une sol de (IH).

Ex (IH) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$ (H) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$

Sol. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

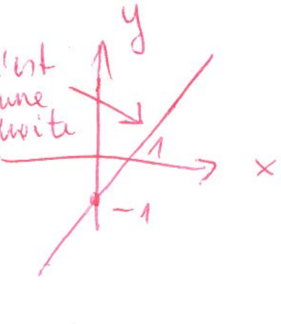
$x_1 - x_2 = 1$

$x_1 = t \in \mathbb{R}$ arbitraire

$x_2 = t - 1$

Ensemble des sol :

$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ ← c'est une droite



n'est pas un sous espace, ne passe pas par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 - x_2 = 0$

$x_1 = t \in \mathbb{R}$ arbitraire

$x_2 = t$

Ensemble des sol :

$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ est une droite qui passe par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, de dim 1.

Th. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $b \in \mathbb{R}^n$

Alors $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ a une seule solution $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} \exists$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A sont libres

$\Leftrightarrow$ rang $A = n$

Dans ce cas $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

Mais on peut trouver la solution avec l'aide du méthode de pivot aussi.

Th. En générale si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ sont donnés

on peut chercher la sol $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ avec l'aide du méthode de pivot.

Si rang $A <$ rang $(A|b)$, alors $\nexists$ sol.

Si rang $A =$ rang$(A|b) = r$ alors $\exists$ sol

[Rem. $r \leq n$ comme rang $A \leq \min\{m,n\}$]

Si $r = n$, alors $\exists!$ sol

Si $r < n$, alors $\exists \infty$ sol avec $n-r$ paramètres libres

Si on veut résoudre $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$, alors rang $A =$ rang$(A|\underline{0}) = r$

donc $\exists$ sol, $\underline{x} = \underline{0}$ est certainement une sol.

Si $r = n$, c'est la seule sol.

Si $r < n$, alors $\exists \infty$ sol et l'ensemble des sol

est un espace vectoriel

dont la dim est $n-r$.

Ex

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

rang $A =$ rang$(A|b) = \underset{\text{nombre des pivots}}{\underset{\uparrow}{3}} = r$

$n = 5$ $\quad n - r = \underline{\underline{2}}$

x_2 et x_5 peut être choisi librement

$x_2 = s \in \mathbb{R}$

$x_5 = t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_4 = -3x_5 = -3t$

$x_3 = -x_5 = -t$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -2s + 3t + 3t + t = -2s + 7t$

L'ensemble des sol:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -2s+7t \\ s \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

donc $\dim M = 2 \quad (= n - r = 5 - 3)$ et

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de M.