Beadandó házi feladatok

4. sorozat (beadási határidő 2017. 11. 20. hétfő 16:00 H607) 8 feladat beadása kötelező.

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynél az átfogó és az egyik befogó hosszának összege 5 cm.

2. Modellezze egy tó partvonalát az x tengely. A felső félsíkban víz van, ebben 1 m/s maximális sebességgel tudunk úszni. Az alsó félsík szárazföld, ezen 6 m/s maximális sebességgel tudunk futni. Hogyan tudunk a leggyorsabban eljutni a $(0, a)$ koordinátájú pontból a $(c, -b)$ koordinátájú pontba ($a, b, c > 0$ paraméterek)? (Milyen fizikai törvényt vezettünk le?)

3. R sugarú kör alakú asztal közepe felett milyen magasra kell elhelyeznünk a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a beesési szög koszinuszával, fordítottan arányos a távolság négyzetével.) (A beesési szög a beeső fénysugár és az adott pontban a felületre merőleges egyenes által bezárt szög.)

4. Adjuk meg a következő függvények $x_0 = 0$ körüli n-edik Taylor-polinomját:
   $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

5. Becsüljük meg az alábbi mennyiségeket egy megfelelő Taylor-polinom segítségével. Ügyeljünk a maradéktag korrekt kezelésére. (Minden esetben írjuk fel a megfelelő Taylor polinomot is, amit a becsléshez használunk, ne csak a helyettesítési értékét!)
   (a) $\sqrt[3]{26}$ értékét 10^{-3} pontossággal;
   (b) $\cos(47^o)$ értékét 10^{-4} pontossággal;
   (c) $\operatorname{ch}(0,2)$ értékét 10^{-5} pontossággal.

6. (a) $\int\limits_1^4 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ (b) $\int\limits_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx = ?$ (c) $\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = ?$ (d) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = ?$ (e) $\int \frac{x+1}{3x-2}\,dx = ?$
   (f) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = ?$ (g) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = ?$ (h) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx = ?$ (i) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx = ?$

7. (a) $\int\limits_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = ?$ (b) $\int \frac{5x^2+19x+15}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx = ?$ (c) $\int \frac{-7-55x+19x^2+6x^3}{x^2+3x-10}\,dx = ?$ (d) $\int\limits_{\ln(1/3)}^{\ln(1/2)} \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} = ?$
   (e) $\int \frac{\operatorname{ch} 3x + \operatorname{sh} 3x}{\operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x}\,dx = ?$ (f) $\int \sin(-8x)\cos(4x)\,dx = ?$ (g) $\int\limits_0^{\pi/2} (x+2)^2 \cos^2(2x)\,dx = ?$ (h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

8. Számoljuk ki az alábbi Riemann integrálokat, mint alkalmas, minden határon túl finomodó felosztássorozatokhoz tartozó téglalapösszegek ($\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$; valamilyen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ választással) határértékét:
   (a) $\int\limits_0^1 (x^2 + x - 2)\,dx = ?$
   (b) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx = ?$ (*Útmutatás:* Először lássuk be, hogy $\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin(n\alpha + \alpha/2)}{2 \sin \alpha/2}$.
   Ehhez felhasználhatjuk a $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$ azonosságot.

9. Előadáson szerepelt, hogy ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $\forall a, b \in I$ és $\forall 0 \le t \le 1$ esetén: $f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)$ (a szelő a függvénygörbe fölött halad). (*Megjegyzés*: Ezt a tulajdonságot a konvexitás definíciójának is szokták tekinteni, így beszélhetünk abban az esetben is konvexitásról, ha $f(x)$ az I bizonyos pontjaiban nem differenciálható. Konvex pl. az $f(x) = |x|$ függvény is, $I = \mathbb{R}$.)

   (a) Igazoljuk a *Jensen-egyenlőtlenség*et: ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, $x_1, x_2, \dots x_n \in I$ pontokra és olyan $0 \le t_i \le 1$ számokra ($i = 1, \dots, n$), melyek teljesítik a $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ feltételt, igaz, hogy:

   $$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

   (b) Lássuk be a számtani és k-ad rendű közepek közti egyenlőtlenséget: ha $a_1, a_2, \dots a_n$ tetszőleges pozitív számok, és $k > 1$ rögzített egész szám, akkor

   $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots a_n^k}{n}}.$$

   (*Útmutatás*: Előző részfeladat, és alkalmas $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvények konvexitása.)

10. Ha $f(x)$ konvex függvény, a Legendre-transzformáltját a

   $$g(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{p \cdot x - f(x)\}$$

   képlet definiálja.

   (a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ függvény Legendre-transzformáltja $g(p) = \frac{p^2}{2m}$ (ahol $m > 0$ valós paraméter)!

   (b) Igazoljuk, hogy az $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$) és $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ ($\beta > 1$) függvények pontosan akkor egymás Legendre-transzformáltjai, ha $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$! (Persze itt általában f és g is csak $x > 0$ – illetve $p > 0$ – esetén van értelmezve.)

   (c) Az előző részfeladat és a Legendre-transzformált definíciója alapján igazoljuk, hogy minden $x > 0$, $p > 0$ értékek esetén $p \cdot x \le \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$, ahol $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ és $\alpha > 1$, $\beta > 1$ (ez a Hölder-egyenlőtlenség legegyszerűbb esete).

11. Legyen $P_n(x)$ egy olyan n-ed fokú polinom, amelynek n különböző valós gyöke van. Mutassuk meg, hogy ilyenkor a $P_n^{(k)}(x)$; $k = 1, \dots, n-1$ deriváltjainak, amelyek szintén polinomok (mi is a fokszámuk?), szintén minden gyöke valós és különböző. (Útmutatás: használjuk a Rolle tételt.)

12. (a) Legyen $f \in C^1[0, 1]$ (azaz $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható). Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $M > 0$ szám, hogy

   $$\Delta_n := \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \le \frac{M}{n}.$$

   (b) Jelöljük az $[a, b]$ itervallum $\tau = \{(x_0, \dots, x_n) \,|\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ felosztásainak összességét $\mathcal{T}$-vel. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény τ felosztáshoz tartozó megváltozása alatt a $\mathrm{Var}(f,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ mennyiséget értjük, és azt mondjuk, hogy f *korlátos változású*, ha teljes megváltozása, a $\mathrm{Var}(f) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{T}} \mathrm{Var}(f,\tau)$ mennyiség véges. Legyen $g \in C^1[a,b]$, mutassuk meg, hogy ekkor g korlátos változású és $\mathrm{Var}(g) = \int\limits_a^b |g'(x)|\, dx$.

13. *

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re vannak olyan a_n és b_n egész számok, amelyekre teljesül, hogy $\int\limits_0^1 x^n e^x \, dx = a_n \cdot e + b_n$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_0^1 x^n e^x \, dx \right) = 0$.

(c) Bizonyítsuk be az előző két részfeladat alapján, hogy e irracionális.

14. * Tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 1$ valós paraméterekre vezessük be a

$$\mathrm{B}(a,b) := \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

jelölést. (Később látni fogjuk, hogy ez tetszőleges $a > 0$ és $b > 0$ esetén is értelmezhető).

(a) Mutassuk meg, hogy ez a kifejezés szimmetrikus: $\mathrm{B}(a,b) = \mathrm{B}(b,a)$.

(b) Számoljuk ki $\mathrm{B}(a,b)$ értékét abban a speciális esetben, amikor a két paraméter közül az egyik egy $n \geq 1$ *egész* szám. (*Útmutatás*: teljes indukció, és az indukciós lépéshez parciális integrálás.)

(c) Legyen most mindkét paraméter $m \geq 1$ illetve $n \geq 1$ egész szám. Mi a kapcsolat $\mathrm{B}(m,n)$ és a binomiális együtthatók között?