Beadandó házi feladatok

1. sorozat (beadási határidő 2017.09.27. 8:25 E1A) Nyolc feladat beadása kötelező.

1. Bizonyítsuk be, hogy

   a) $\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$, ha $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

   b) $(n!)^2 > n^n$, ha $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. a) Igazoljuk, hogy $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1$, ha $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

   b) Adjuk meg $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ és $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ értékét, ha $n \in \mathbb{Z}^+$. Állításunkat igazoljuk.

   c) Igazoljuk, hogy $10^{2017} + 5$ nem négyzetszám.

3. n egyenest a síkon általános helyzetűnek hívunk, ha közülük semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át közös ponton. Legyen $a(n)$ az a szám, ahány részre osztja a síkot n általános helyzetű egyenes! Bizonyítsuk be, hogy alkalmas A, B, C valós számokra $a(n) = An^2 + Bn + C$. (Bátrabbak szorgalmi feladatként elgondolkodhatnak azon is, hogy n általános helyzetű sík hány részre osztja a teret.)

4. a) Igazoljuk, hogy $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$, és $||x| - |y|| \leq |x + y|$ minden x, y valós számra.

   b) Ábrázoljuk az $|x - 1| < |y + 2|$ egyenlőtlenséget kielégítő (x, y) pontok halmazát. (Segítség: ábrázoljuk előbb $|x| < |y|$-t.)

   c) Ábrázoljuk az $|x - y| < |y + 3x|$ egyenlőtlenséget kielégítő (x, y) pontok halmazát.

5. a) Igazoljuk, hogy $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ tetszőleges A, B, C halmazra.

   Az állítást szemléltethetjük Venn-diagramm segítségével, de formális bizonyítást is csináljunk, felhasználva az $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ azonosságot és az 1. gyakorlat 1. feladatában szereplő azonosságokat (disztributív azonosságok és De Morgan).

   b) Igaz-e hogy $(A \setminus B) \cup B = A$ tetszőleges A, B halmazra? Ha igen, bizonyítsuk, ha nem, adjunk ellenpéldát, és mondjuk meg, hogy milyen feltétel teljesülése esetén áll fenn az egyenlőség.

6. a) Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

   $(-0,99)^n$, $n^2 - n^3$, $\frac{n^8 - 2n^6 - 10n^2}{n^5 + 100n - 1}$. Keressünk ε-hoz ill. K-hoz megfelelő küszöbindexet is.

   b) Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = +\infty$.

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2 + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1}\right) = ?$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\binom{n}{3} + 2^n} \cdot \left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+1}\right)^{\binom{n}{2}} \right) = ?$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n^{2008} + 3^{2n}}{9^{n+5} + \sin(n^n)} + \frac{\cos((\sqrt{2})^n) \cdot (\sqrt{5})^n + n!}{(2n)! + \binom{n}{10}} \right) = ?$

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

   b) Az $\alpha > 0$ paraméter minden lehetséges értéke mellett határozzuk meg a következő határértéket:

   $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}}\right)^{2^{n+2}-3}$,

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = ?$ (Ötlet: vizsgáljuk az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat viselkedését.)

9. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = c$, ahol $c > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Az állítás megfordítása *nem* igaz: mutassunk példát olyan sorozatra, melyre $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, és $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

   (b) Mutassunk példákat olyan a_n és b_n sorozatokra, hogy (i) $a_n - b_n \to 0$, de a_n/b_n nem tart 1-hez, illetve (ii) $a_n/b_n \to 1$, de $a_n - b_n$ nem tart 0-hoz.

10. a) Igaz-e, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 1$? Ha igen, bizonyítsuk, ha nem, mit mondhatunk a határértékről? (1^∞ spec esete)

    b) Igaz-e, hogy ha $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$? Ha igen, bizonyítsuk, ha nem, mit mondhatunk a határértékről? (0^0 spec esete)

    c) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ határértékről? (∞^0 spec esete)

    d) $a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n$. Igaz-e hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

11. a) Keressünk olyan (ismert) kétváltozós műveletet, ami (1) nem kommutatív, (2) nem asszociatív.

    b) Adjunk meg olyan ismert matematikai relációt ($<, \leq, >, \geq, \subset$-től különbözőt), ami tranzitív.

    c) Azt mondjuk, hogy a relációban áll b-vel (jelöljük aRb), ha b a-nak gyermeke. Szimmetrikus-e ez a reláció, tranzitív-e? Meghatároz-e egy függvényt? Ha igen, az injektív-e?

    d) És ha a akkor áll relációban b-vel, ha b a-nak az édesanyja, akkor mi a válasz az előbbi kérdésekre?

    e) A = {1, 2, ..., 8} and B = {1, ..., 100}. (1) Hány $f : A \to B$ függvény létezik, amelyre $\mathcal{D}_f = A$? (2) Hány $f : A \to B$ injektív függvény létezik, amelyre $\mathcal{D}_f = A$? (3) Hány $f : A \to B$ függvény létezik, amelyre $\mathcal{D}_f \subset A$ tetszőleges?

12. (*) Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. (Stirling formulát ne használjuk, azt még nem bizonyítottuk.)

13. a) Legyen $a, b > 0$. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén minimális $\frac{a+bx^4}{x^2}$? (Ötlet: használjuk a számtani, mértani közép közötti egyenlőtlenséget!)

    b) Igazoljuk a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

    Ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

14. (*) a) Adjunk meg olyan sorozatot, amelynek végtelen sok torlódási pontja van.

    b) Adjunk meg olyan sorozatot, amelynek a torlódási pontjainak halmaza $[0, 1]$.

    c) Lehet-e egy sorozat torlódási pontjainak halmaza $(0, 1)$?