Fizikus BSc képzés, analízis vizsga, 2014. január 7.

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = ?$ (2) $x(t) = e^{3t}\cos(2t)$, $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$, $t_0 = 0$-hoz tartozó érintőegyenes egyenlete? (3) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = ?$

(4) $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = ?$ (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 3+2+2+3=10 pont.

1. Legyen a_n egy valós számokból álló sorozat. Igazak-e a következő állítások: (i) Ha a_n korlátos, akkor konvergens. (ii) Ha a_n konvergens, akkor korlátos. Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, adjunk ellenpéldát.
2. Mit állít Weierstrass tétele egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény szélsőértékeiről? (Itt $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum.)
3. Mutassunk példát egy olyan $f(x)$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ egy környezetében értelmezve van, de nem léteznek (még tágabb értelemben véve sem) a $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ féloldali határértékek.
4. Legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos. Igaz-e a következő állítás: ha az $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ improprius integrál is konvergens. Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, adjunk ellenpéldát.

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

Fizikus BSc képzés, analízis vizsga, 2014. január 7.

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = ?$ (2) $x(t) = e^{3t}\cos(2t)$, $y(t) = e^{3t}\sin(2t)$, $t_0 = 0$-hoz tartozó érintőegyenes egyenlete? (3) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = ?$

(4) $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = ?$ (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 3+2+2+3=10 pont.

1. Legyen a_n egy valós számokból álló sorozat. Igazak-e a következő állítások: (i) Ha a_n korlátos, akkor konvergens. (ii) Ha a_n konvergens, akkor korlátos. Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, adjunk ellenpéldát.
2. Mit állít Weierstrass tétele egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény szélsőértékeiről? (Itt $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum.)
3. Mutassunk példát egy olyan $f(x)$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ egy környezetében értelmezve van, de nem léteznek (még tágabb értelemben véve sem) a $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ féloldali határértékek.
4. Legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos. Igaz-e a következő állítás: ha az $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ improprius integrál is konvergens. Ha igen, vázoljuk, miért, ha nem, adjunk ellenpéldát.

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.

Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 8+10+10+12=40 pont.**

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynél az átfogó és az egyik befogó összege adott állandó érték (mondjuk 10 egység).
2. Határozzuk meg a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \arcsin x\}$ homogén tömegeloszlású síklemez súlypontjának x koordinátáját.
3. Határozzuk meg a $x^2y' - \cos(2y) = 1$ differenciálegyenletnek azt az $y = h(x)$ megoldását, amelyre a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{4}$.
4. (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} = ?$ (b) Konvergens vagy divergens? $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)\ln^3(\ln(x))}$ (c) Konvergens vagy divergens? $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2-5}{(n-2)(n+2)}\right)^{n^3-4n}$

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.

Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 8+10+10+12=40 pont.**

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynél az átfogó és az egyik befogó összege adott állandó érték (mondjuk 10 egység).
2. Határozzuk meg a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \arcsin x\}$ homogén tömegeloszlású síklemez súlypontjának x koordinátáját.
3. Határozzuk meg a $x^2y' - \cos(2y) = 1$ differenciálegyenletnek azt az $y = h(x)$ megoldását, amelyre a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{4}$.
4. (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} = ?$ (b) Konvergens vagy divergens? $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)\ln^3(\ln(x))}$ (c) Konvergens vagy divergens? $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2-5}{(n-2)(n+2)}\right)^{n^3-4n}$

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.