

Analízis fizikusoknak/mérnököknek vizsga 2018. jan. 12.

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 40 perc.

Az I./1. és az I./2. részből is külön-külön legalább 6 pontot el kell érni.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 + n^2} - n^2 = ?$ (2) $f(x) = Ax + B$, ha $x > 0$ és $f(x) = e^{-2x}$, ha $x \leq 0$. Milyen $A, B \in \mathbb{R}$ -re lesz f mindenhol differenciálható? (3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = ?$ (4) $\int \ln(1+x^2) dx = ?$ (5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+3}} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+6+4+3+2+2=19 pont. (15 pont=100%)

- Állítsuk nagyságrendjük szerint növekvő sorrendbe a következő végtelenhez tartó sorozatokat: $n!, n^3, \left(\frac{n}{2}\right)^n, n^n, 3^n$. Állításunkat indokoljuk!
- Igazak-e az alábbi állítások? Ha igen, miért? Ha nem, mutassunk ellenpéldát!
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. (b) Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor monoton. (d) Ha egy sorozat monoton, akkor konvergens.
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat. (e) Ha egy sorozat Cauchy-sorozat, akkor konvergens.
- (a) Mikor mondjuk azt, hogy az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ pontban folytonos? Adjon meg két különböző lehetséges definíciót.
(b) Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos az $x = x_0$ pontban, akkor ott differenciálható? És az állítás megfordítása? Ha igen, miért, ha nem miért.
- Mit mond ki a L'Hospital szabály? Válassza az egyik esetben a bizonyítást!
- Igaz-e, hogy egy nyílt intervallumon folytonos függvénynek mindig létezik primitív függvénye? Ha igen, hogyan adhatjuk meg?
- Hogyan számolhatjuk ki egy forgástest felszínét? (Milyen feltételek mellett?)

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

Analízis fizikusoknak/mérnököknek vizsga 2018. jan. 12.

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 40 perc.

Az I./1. és az I./2. részből is külön-külön legalább 6 pontot el kell érni.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 + n^2} - n^2 = ?$ (2) $f(x) = Ax + B$, ha $x > 0$ és $f(x) = e^{-2x}$, ha $x \leq 0$. Milyen $A, B \in \mathbb{R}$ -re lesz f mindenhol differenciálható? (3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = ?$ (4) $\int \ln(1+x^2) dx = ?$ (5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+3}} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+6+4+3+2+2=19 pont. (15 pont=100%)

- Állítsuk nagyságrendjük szerint növekvő sorrendbe a következő végtelenhez tartó sorozatokat: $n!, n^3, \left(\frac{n}{2}\right)^n, n^n, 3^n$. Állításunkat indokoljuk!
- Igazak-e az alábbi állítások? Ha igen, miért? Ha nem, mutassunk ellenpéldát!
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. (b) Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor monoton. (d) Ha egy sorozat monoton, akkor konvergens.
 - Ha egy sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat. (e) Ha egy sorozat Cauchy-sorozat, akkor konvergens.
- (a) Mikor mondjuk azt, hogy az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ pontban folytonos? Adjon meg két különböző lehetséges definíciót.
(b) Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos az $x = x_0$ pontban, akkor ott differenciálható? És az állítás megfordítása? Ha igen, miért, ha nem miért.
- Mit mond ki a L'Hospital szabály? Válassza az egyik esetben a bizonyítást!
- Igaz-e, hogy egy nyílt intervallumon folytonos függvénynek mindig létezik primitív függvénye? Ha igen, hogyan adhatjuk meg?
- Hogyan számolhatjuk ki egy forgástest felszínét? (Milyen feltételek mellett?)

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: KÉT SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP + kiadott deriválttáblázat

Munkaidő: 80 perc. Pontozás: 8+8+9+9+15=49 pont. (35 pont=100%)

- $f(x) = e^{4x^3+3x^4}$.
 - Adjunk meg egy maximális $x = 0$ -t tartalmazó intervallumot, ahol f invertálható!
 - Adjuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét!
 - Mennyi az inverzfüggvény deriváltja az e^7 pontban?
 - Létezik-e f -nek maximum illetve minimum helye a teljes értelmezési tartományon? Ha igen, hol?
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$
- Tekintsük a polárkoordinátás alakban adott $r(\varphi) = \sin \varphi$ görbét, ahol $0 < \varphi < \pi$. Vázzuk hozzávetőlegesen ezt a görbét! Mely pont(ok)ban lesz a görbe érintője párhuzamos az $y = 1 + \sqrt{3}x$ egyenessel? Az egyik ilyen pontban írjuk fel az érintőegyenest.
- Határozzuk meg az $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ görbe és az $y = \ln(\sin x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ görbe ívhosszát!
 - Adjuk meg az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{4}$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!
- Adjuk meg az $(1 + e^x)e^y y' = 1 + e^y$ differenciálegyenlet általános megoldását és az $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ feltételt kielégítő megoldást!
- Konvergens vagy divergens: $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{(n-1)(n+1)} \right)^{\binom{n}{3} + \binom{n}{2}}$?
 - $x = 1$ és $x = -1$ esetén állapítsuk meg, az alábbi sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens, vagy divergens!
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n$$
 - $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$ konvergens vagy divergens? Adjuk is meg az értékét!

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: KÉT SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP + kiadott deriválttáblázat

Munkaidő: 80 perc. Pontozás: 8+8+9+9+15=49 pont. (35 pont=100%)

- $f(x) = e^{4x^3+3x^4}$.
 - Adjunk meg egy maximális $x = 0$ -t tartalmazó intervallumot, ahol f invertálható!
 - Adjuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét!
 - Mennyi az inverzfüggvény deriváltja az e^7 pontban?
 - Létezik-e f -nek maximum illetve minimum helye a teljes értelmezési tartományon? Ha igen, hol?
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$
- Tekintsük a polárkoordinátás alakban adott $r(\varphi) = \sin \varphi$ görbét, ahol $0 < \varphi < \pi$. Vázzuk hozzávetőlegesen ezt a görbét! Mely pont(ok)ban lesz a görbe érintője párhuzamos az $y = 1 + \sqrt{3}x$ egyenessel? Az egyik ilyen pontban írjuk fel az érintőegyenest.
- Határozzuk meg az $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ görbe és az $y = \ln(\sin x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ görbe ívhosszát!
 - Adjuk meg az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{4}$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!
- Adjuk meg az $(1 + e^x)e^y y' = 1 + e^y$ differenciálegyenlet általános megoldását és az $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ feltételt kielégítő megoldást!
- Konvergens vagy divergens: $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{(n-1)(n+1)} \right)^{\binom{n}{3} + \binom{n}{2}}$?
 - $x = 1$ és $x = -1$ esetén állapítsuk meg, az alábbi sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens, vagy divergens!
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n$$
 - $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$ konvergens vagy divergens? Adjuk is meg az értékét!

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.