Fizikus BSc, Analízis gyakorlathoz 1. zh 2016. okt. 13. A csop Mo

(1.) $\underbrace{(\cos(n^2)-\cos n^3)}_{\text{korlátos}}\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\downarrow \; 0,\text{ mert } n! \ll n^n} \to \underline{\underline{0}}$, $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e}{e^{-1}} = \underline{\underline{e^2}}$

$$\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)3n = \underbrace{3n^2}_{\downarrow \; \infty}\Big(\underbrace{\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}}-2}_{\to -1}\Big) \to -\infty$$

vagy máshogy: $\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)3n = \frac{n^2+1-4n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n}3n = \frac{-3n^3+3n}{\sqrt{n^2+1}+2n} = \frac{-3n^2+3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2} \to \underline{\underline{-\infty}}$

Így $\lim\limits_{n\to\infty}(\quad) = 0 + e^2\cdot(-\infty) " = \underline{\underline{-\infty}}$

(2.) Ha a sorozat konvergens, akkor $\exists$ és véges $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: A$.

De akkor $\lim a_{n+1} = \lim a_n = A$, így

$$A = \frac{3}{4}A + \frac{4}{A}$$

$$A^2 = \frac{3}{4}A^2 + 4$$

$$\frac{A^2}{4} = 4$$

$$A^2 = 4^2$$

$$A = \pm 4$$

$a_1 = 100 > 0$ és látható, h. ha $a_n > 0$, akkor $a_{n+1} > 0$, így teljes ind-val $a_n > 0$ adódik $\forall n$-re.

Így $\underline{\underline{\lim a_n}} = A = \underline{\underline{4}}$ lehet csak.

Be kell látnunk, h. a sorozat konvergens.

Erre egy lehetőség: lássuk be, h. a sorozat monoton nő és felülről korlátos

vagy — " — csökken és alulról korlátos.

(persze, ha véletlen egyik se igaz, akkor nem tudjuk belátni)

$$a_{n+1}-a_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{4}{a_n} - a_n = \frac{4}{a_n} - \frac{a_n}{4} > 0 \underset{(a_n>0\ \forall n)}{\iff} 4^2 > a_n^2 \underset{a_n>0}{\iff} 4 > a_n$$

Azaz $a_{n+1}-a_n > 0 \iff a_n < 4$

hasonlóan $a_{n+1}-a_n < 0 \iff a_n > 4$

Ezért, ha $a_n < 4$ teljesül $\forall n$-re, akkor $a_{n+1} > a_n\ \forall n$, azaz a sorozat mon. nő

ha $a_n > 4$ — " — , $a_{n+1} < a_n\ \forall n$, azaz a sorozat mon. fogy

Ezekből, melyiket tudnánk belátni. Használhatjuk újra a rekurziót:

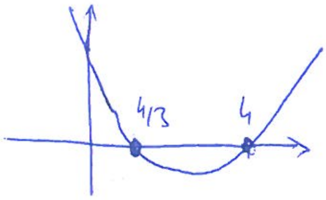
$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{4}{a_n} \overset{?}{>} 4 \quad / \cdot 4a_n$$ (próbáljuk ki előbb, kiszámolva $a_1 = 100 > 4$, $a_2 = 75{,}04 > 4$)

$$\Updownarrow \quad a_n > 0$$

$$3a_n^2 + 4^2 > 4^2 \cdot a_n$$

$$3a_n^2 - 16a_n + 16 > 0$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 12 \cdot 16}}{6} = \frac{4(4 \pm \sqrt{16-12})}{6} = \frac{(4 \pm 2)4}{6} \quad x_1 = 4, \; x_2 = \frac{4}{3}$$



Ezszerint

$$a_{n+1} > 4 \iff 3a_n^2 - 16a_n + 16 > 0 \iff a_n > 4 \text{ vagy } a_n < \frac{4}{3}.$$

Így, ha $a_n > 4$, akkor $a_{n+1} > 4$ is teljesül, $a_1 = 100 > 4$ $\overset{}{\Rightarrow}$ teljes ind. elv szerint $a_n > 4$ $\forall n$.

Így a sorozat alulról korlátos is, mon fogyó, vagyis tényleg konvergens.

$a_n > 4$ $\forall n$ bit-ra a számtani–mértani közép (≠ segít) is használhatjuk, de ezt nehezebb észrevenni:

$$\frac{a_{n+1}}{4} = \frac{\frac{3}{4}a_n + \frac{4}{a_n}}{4} = \frac{\frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{4} + \frac{4}{a_n}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a_n}{4} \cdot \frac{a_n}{4} \cdot \frac{a_n}{4} \cdot \frac{4}{a_n}} = \sqrt[4]{\frac{a_n^2}{4^2}}$$

Így, ha $a_n > 4$, akkor $a_{n+1} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a_n^2}{4^2}} > 4 \sqrt[4]{\frac{4^2}{4^2}} = 4$

másrészt $a_1 > 4$, így így is lehet ~~[illegible]~~ telj. ind.-val bizonyítani, h. $a_n > 4$ $\forall n$-re.

Anal. fiz. 1. zh. 2016. okt. 13 Megoldás

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x}, & \text{ha } x < 0 \\ D, & \text{ha } x = 0 \\ Ax + B + \dfrac{C}{\sin x}, & \text{ha } 0 < x < 2 \end{cases}$$

a)

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0 = \lim_{x \to 0-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0+} Ax + B + \frac{C}{\sin x} = \begin{cases} B, & \text{ha } C = 0 \\ +\infty, & \text{ha } C > 0 \\ -\infty, & \text{ha } C < 0 \end{cases} = \lim_{x \to 0+} f(x)$$

$f(0) = D$

Így a fv csak akkor folyt. a 0-ban, ha $0 = D = B = C = 0$.

Ha $C \neq 0$, akkor másodfajú szakadása van.

Ha $C = 0$, de $B \neq 0$, akkor elsőfajú, és ugrása van.

Ha $C = 0$, $B = 0$, de $D \neq 0$, akkor elsőfajú és megszüntethető a szakadás.

b) $f(x)$ csak akkor lehet diff.ható 0-ban, ha ott folytonos is. Így csak akkor van esélye a diffhatóságra, ha $0 = D = B = C$, azaz

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x}, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ Ax, & \text{ha } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Meg kell nézni, h. diffható-e akkor. (Ugyanis a folytonosság csak szükséges, de nem elégséges feltétel.)

Kell: $f'(0+) = f'(0-) \in \mathbb{R}$ legyen.

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$$

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{Ax - 0}{x} = A$$

Így f a.cs.a diffható 0-ban, ha $\underline{\underline{B = C = D = 0 \text{ és } A = 1}}$

akkor és csak akkor.

c) ilyenkor

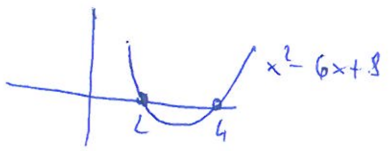
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x^2)2x\cdot x-\sin x^2}{x^2} & ,\text{ha } x<0\\ A=1 & ,\text{ha } x>0\\ f'(0+)=f'(0-)=1 & ,\text{ha } x=0\end{cases}$$

azaz $f'(x)=\begin{cases}\cos(x^2)\,2x^2-\sin(x^2) & ,\text{ha } x<0\\ 1 & ,\text{ha } x\geq 0\end{cases}$

---

(4) $f(x)=e^{x^2-6x+8}$

a) $x^2-6x+8=0 \iff x=x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}$ azaz $x=4$ v. $x=2$



$x^2-6x+8=(x-3)^2-1$ -nek $x=3$-nál van minimuma

$(3-3)^2-1=-1$

Így x^2-6x+8 lehetséges értékei: $[-1,+\infty)$

Így $R_f=[e^{-1},+\infty)=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

$D_f=\mathbb{R}$ (bárhol értelmezett)

b) Mivel $f(x)$ csak $(-\infty,3]$ és $[3,+\infty)$-en monoton, így csak ott invertálható (hiszen folyt. f-ről van szó)

Így a max. $[-a,a]$ alakú int. $[-3,3]$.

c) $y=e^{x^2-6x+8}=e^{(x-3)^2-1}$

$\ln y=(x-3)^2-1$

$1+\ln y=(x-3)^2$ / most $x\leq 3$, így $x-3\leq 0$, így

$-\sqrt{1+\ln y}=x-3$

$3-\sqrt{1+\ln y}=x$

azaz $f^{-1}(y)=3-\sqrt{1+\ln y}$

azaz $f^{-1}(x)=3-\sqrt{1+\ln x}$

d) 1.Mo

Így $(f^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

$(f^{-1})'(1)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1+\underbrace{\ln 1}_{0}}}=\dfrac{-1}{2}$

d) 2.Mo

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$f'(x)=e^{x^2-6x+8}(2x-6)$, $x=1$ helyen kell a deriváltja f^{-1}-nek

$f^{-1}(1)=?$

$f^{-1}(1)=x \iff 1=f(x)=e^{x^2-6x+8}$

$\iff x^2-6x+8=0$

$\iff \boxed{x=2}$ v. $x=4$.

ez van a $[-3,3]$ int.-ban.

Így $f^{-1}(1)=2$, $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{e^0(2\cdot 2-6)}=-\dfrac{1}{2}$

Anal Ia. 1. zh 2016 okt. 13. A csop ort

5.

$$f(x) = \sqrt{x}^{\arcsin\frac{x}{2}} = e^{\ln\sqrt{x}\cdot\arcsin\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = e^{\ln\sqrt{x}\cdot\arcsin\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\arcsin\frac{x}{2} + \ln\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(1) = e^0\cdot\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$$

$\boxed{\ln 1 = 0}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \alpha^\circ = 30^\circ = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

$\underline{\underline{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}}$

$f(1) = 1$

érintőegyenes egyenlete: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

azaz: $\underline{\underline{y - 1 = \frac{\pi}{12}(x-1)}}$