Fizikus BSc képzés, analízis első zh 2016. október 13. A CSOPORT

Munkaidő: 90 perc. Pontozás: 4+4+4+4+4=20 pont.

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\cos(n^2)-\cos(n^3)\right)\frac{n!}{n^n}+\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)3n\right)=?$

2. Mutassuk meg, hogy az $a_1=100; a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{4}{a_n}$ $(n=1,2,\dots)$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét.

3. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2)}{x} & \text{, ha } x<0,\\ D & \text{, ha } x=0,\\ Ax+B+\frac{C}{\sin x} & \text{, ha } 0<x<2.\end{cases}$$

   a) Milyen A,B,C,D paraméterértékek esetén folytonos $f(x)$? Ha nem folytonos, adjuk meg a szakadási hely típusát.

   b) Hogyan válasszuk meg az A, B, C és D paraméterek értékét ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény minden $x<2$ pontban differenciálható legyen?

   c) Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

4. Legyen $f(x)=e^{x^2-6x+8}$.

   (a) Adjuk meg $f(x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét.

   (b) Keressük meg azt a maximális $[-a,a]$ alakú intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható. (Segítség: rajzoljuk fel az x^2-6x+8 függvényt.)

   (c) Adjuk meg a megszorított függvény inverzét.

   (d) Határozzuk meg az inverz függvényt deriváltját az 1 pontban.

5. Írjuk fel $f(x)=(\sqrt{x})^{\arcsin\frac{x}{2}}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0=1$ pontban.

Fizikus BSc képzés, analízis első zh 2016. október 13. A CSOPORT

Munkaidő: 90 perc. Pontozás: 4+4+4+4+4=20 pont.

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\cos(n^2)-\cos(n^3)\right)\frac{n!}{n^n}+\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)3n\right)=?$

2. Mutassuk meg, hogy az $a_1=100; a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{4}{a_n}$ $(n=1,2,\dots)$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét.

3. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2)}{x} & \text{, ha } x<0,\\ D & \text{, ha } x=0,\\ Ax+B+\frac{C}{\sin x} & \text{, ha } 0<x<2.\end{cases}$$

   a) Milyen A,B,C,D paraméterértékek esetén folytonos $f(x)$? Ha nem folytonos, adjuk meg a szakadási hely típusát.

   b) Hogyan válasszuk meg az A, B, C és D paraméterek értékét ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény minden $x<2$ pontban differenciálható legyen?

   c) Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

4. Legyen $f(x)=e^{x^2-6x+8}$.

   (a) Adjuk meg $f(x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét.

   (b) Keressük meg azt a maximális $[-a,a]$ alakú intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható. (Segítség: rajzoljuk fel az x^2-6x+8 függvényt.)

   (c) Adjuk meg a megszorított függvény inverzét.

   (d) Határozzuk meg az inverz függvényt deriváltját az 1 pontban.

5. Írjuk fel $f(x)=(\sqrt{x})^{\arcsin\frac{x}{2}}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0=1$ pontban.

Fizikus BSc képzés, analízis első zh 2016. október 13. B CSOPORT

Munkaidő: 90 perc. Pontozás: 4+4+4+4+4=20 pont.

1. $\lim_{n\to\infty}\left((1+\cos(2n))\frac{5^{2n}}{n!}+\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+3n}\right)^{2n+7}\cdot\left(\frac{2^n+3n}{n^6+5^n}\right)^{1/n}\right)=?$

2. Mutassuk meg, hogy az $b_1=1000; b_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2b_n+\frac{9}{b_n}\right)$ $(n=1,2,\dots)$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét.

3. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & \text{,ha } x<0,\\ D & \text{,ha } x=0,\\ Ax+B+\frac{C}{x} & \text{,ha } x>0.\end{cases}$$

   a) Milyen A,B,C,D paraméterértékek esetén folytonos $f(x)$? Ha nem folytonos, adjuk meg a szakadási hely típusát.

   b) Hogyan válasszuk meg az A, B, C és D paraméterek értékét ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény minden $x\in\mathbb{R}$ pontban differenciálható legyen?

   c) Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

4. Legyen $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)$.

   (a) Adjuk meg $f(x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét.

   (b) Keressük meg azt a maximális $[-a,a]$ alakú intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható. (Segítség: rajzoljuk fel az x^2-4x+3 függvényt.)

   (c) Adjuk meg a megszorított függvény inverzét.

   (d) Határozzuk meg az inverz függvényt deriváltját a 0 pontban.

5. Írjuk fel $f(x)=(\ln\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0=e^2$ pontban.

Fizikus BSc képzés, analízis első zh 2016. október 13. B CSOPORT

Munkaidő: 90 perc. Pontozás: 4+4+4+4+4=20 pont.

1. $\lim_{n\to\infty}\left((1+\cos(2n))\frac{5^{2n}}{n!}+\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+3n}\right)^{2n+7}\cdot\left(\frac{2^n+3n}{n^6+5^n}\right)^{1/n}\right)=?$

2. Mutassuk meg, hogy az $b_1=1000; b_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2b_n+\frac{9}{b_n}\right)$ $(n=1,2,\dots)$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét.

3. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & \text{,ha } x<0,\\ D & \text{,ha } x=0,\\ Ax+B+\frac{C}{x} & \text{,ha } x>0.\end{cases}$$

   a) Milyen A,B,C,D paraméterértékek esetén folytonos $f(x)$? Ha nem folytonos, adjuk meg a szakadási hely típusát.

   b) Hogyan válasszuk meg az A, B, C és D paraméterek értékét ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény minden $x\in\mathbb{R}$ pontban differenciálható legyen?

   c) Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

4. Legyen $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)$.

   (a) Adjuk meg $f(x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét.

   (b) Keressük meg azt a maximális $[-a,a]$ alakú intervallumot, amelyre megszorítva $f(x)$ invertálható. (Segítség: rajzoljuk fel az x^2-4x+3 függvényt.)

   (c) Adjuk meg a megszorított függvény inverzét.

   (d) Határozzuk meg az inverz függvényt deriváltját a 0 pontban.

5. Írjuk fel $f(x)=(\ln\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0=e^2$ pontban.