Házi feladatok

5. sorozat

1.

(a) $\displaystyle\int \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{5x^2+19x+15}{x^3+6x^2+12x+8}\, dx = ?$ (c) $\displaystyle\int \frac{-7-55x+19x^2+6x^3}{x^2+3x-10}\, dx = ?$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sin x}\, dx = ?$

2.

(a) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx = ?$ (b) $\displaystyle\int_2^{5/2} \frac{1}{\sqrt{-7+8x-2x^2}}\, dx = ?$ (c) $\displaystyle\int_2^{5/2} \sqrt{-7+8x-2x^2}\, dx = ?$ (d) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x+\frac{1}{2}}{\operatorname{ch} x}\, dx = ?$

3. Számoljuk ki a megadott két görbe által határolt korlátos tartomány területét:
   (a) $y = 2x^2+9x+3$ illetve $y = 3x^2+2x+13$; (b) $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ illetve $y = e^x$.

4. Határozzuk meg az alábbi görbeszakaszok ívhosszát:
   (a) $f(x) = e^x, \ \ln 2 \le x \le \ln 3$,
   (b) $f(x) = \arcsin(e^x), \ \ln(\sqrt{2}/2) \le x \le \ln(\sqrt{3}/2)$.

5. Vezessük le az ívhossz általános képletéből, hogy egy $r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ polárkoordinátás görbe ívhosszát az $\int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$ képlettel lehet meghatározni, ahol $'$ a φ szerinti deriválást jelöli. Ezek alapján számoljuk ki az $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ görbe ívhosszát.

6. Keressük meg az $\dot{x} = \sqrt{4x - x^2}$ differenciálegyenletnek az $x(0) = 1$, $x(0) = 3$, valamint az $x(0) = 4$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldásait. Mi történik, ha $x(0) = 0$? Meg tudjuk-e állapítani, honnan indultunk ($x(0) = ?$), ha $x(20) = 4$?

7. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:
   (a) $y' \cos x - y \sin x = 1$;
   (b) $\ddot{x} = \frac{1}{x^3}$. (*Útmutatás:* Ahogy az előadáson szerepelt, ennél a hiányos másodrendű egyenletnél először érdemes a $v(x)$ függvényre átírni a differenciálegyenletet, azt megoldani, majd ez alapján meghatározni $x(t)$-t. Az egyenlet egy (egységnyi tömegű) pontrészecske mozgását írja le egydimenzióban, egy konzervatív erőtérben. Gondoljuk meg, mi a potenciál, és hol jelentkezik a megoldásban a teljes energia.)

8.

(a) $\displaystyle F(x) = \int_1^x \ln(\operatorname{arsh}(\sqrt{t}))dt, x > 1, F'(x) = ?,\quad G(x) = \int_{\sqrt{1+x^2}}^{e^{x^2}} \ln(\operatorname{arsh}(\sqrt{t})dt, G'(x) = ?$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{t^{5/3}}{\sqrt[3]{1+8t^2}}dt}{\ln(1+\sqrt{e^{x^2}})} = ?$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{t^2}dt}{\int_0^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}(t^3)dt} = ?$

9. *

(a) Tekintsük a sík egy olyan D korlátos tartományát, melyet egy $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; $a \le t \le b$ paraméteres alakban megadott, (szakaszonként) folytonosan differenciálható, zárt görbe – azaz $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ – határol. Tegyük fel továbbá, hogy D belsejében van (legalább) egy P pont, melyre teljesül, hogy a P-ből kiinduló félegyenesek mindegyike egy és csak egy pontban metszi a $\gamma(t)$ görbét. Mutassuk meg, hogy ekkor a D tartomány területe kiszámolható a

$$t(D) = \left| \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\, dt \right|$$

képlettel. (*Útmutatás:* Tegyük fel először, hogy P az origó, és bontsuk fel D-t kis háromszögekre; ezek területét kiszámolhatjuk, mint két szomszédos oldalukat kijelölő vektor vektoriális szorzatának abszolút értékét. Ezek után mutassuk meg, hogy az origó eltolása nem változtatja meg az integrál értékét.)

(b) Paraméterezzük az $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ ellipszist, majd számoljuk ki a fenti képlettel belsejének a területét.

(c) Előadáson szerepelt az $r(\varphi)$, $(0 \le)\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 (\le 2\pi)$ polárkoordinátás görbe által meghatározott szektorszerű idom fogalma és területképlete ($t = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi$). Vezessük le ezt a formulát az (a) feladat képletéből.

10. (a) Legyen $0 \le a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ha az f grafikonja, valamint az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt korlátos tartományt az y tengely körül megforgatjuk, akkor a keletkező forgástest térfogatát a $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$ képlettel lehet számolni; az f grafikonjának y tengely körüli megforgatásával kapott felület felszínét pedig az $A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ képlettel. Számoljuk ki:

(b) Az $f(x) = 2x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$ görbeszakasz y tengely körüli megforgatásával kapott felület felszínét;

(c) Az $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$ görbe és az x tengely közti korlátos tartomány y tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát.

11. (a) Bizonyítsuk be a *Pappos-Guldin szabályt:* (amit már Pappos 4.sz-i görög matematikus is ismert!)
(1) Ha egy T korlátos síkbeli tartományt megforgatunk egy vele egysíkú és őt nem metsző tengely körül, akkor a keletkező forgástest térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a tartomány területét megszorozzuk a tartomány súlypontja által leírt kör kerületével.

(2) Ha egy Γ síkbeli egyszerű ívet megforgatunk egy vele egysíkú és őt nem metsző tengely körül, akkor a keletkező forgástest felszínét megkaphatjuk úgy, hogy az ív hosszát megszorozzuk az ív súlypontja által leírt kör kerületével.

(*Útmutatás:* (1) esetén az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tengelyhez képesti ún. normáltartományról van szó, vagyis adottak $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$; $f(x) \le g(x)$ függvények, hogy $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b;\ f(x) \le y \le g(x)\}$, tengelyként választhatjuk az x tengelyt vagy az y tengelyt.)

(b) Határozzuk meg *integrálással és integrálás nélkül is* egy félkör alakú, homogén tömegeloszlású lemez súlypontját.

(c) Ellenőrizzük az (1) szabályt úgy, hogy kiszámoljuk a szereplő mennyiségeket akkor, ha megforgatjuk az $y = \sin x$ görbe $0 \le x \le \pi/2$ szakasza, az $x = \pi/2$ egyenes és az x tengely által körülhatárolt korlátos tartományt az y tengely (!) körül.

(d) Határozzuk meg annak a tórusznak a felszínét és térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy egy $r > 0$ sugarú kört megforgatunk egy vele egysíkú, a kör középpontjától $R > r$ távolságra levő tengely körül.