Beadandó házi feladatok

3. sorozat (beadási határidő 2017. 11. 15. szerda 08:25 E1A) 8 feladat beadása kötelező.

1. (a) Határozzuk meg az $\operatorname{arsh} x$ és $\operatorname{arch} x$ függvények deriváltjait felhasználva az inverz függvény deriválási szabályát és a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ összefüggést.

   (b) Igazoljuk, hogy $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $\forall x \geq 1$ esetén. Ez alapján is határozzuk meg az $\operatorname{arsh} x$ és $\operatorname{arch} x$ függvények deriváltjait.

   (c) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x + \sin x$ függvény a teljes $\mathbb{R}$-en szigorúan monoton nő, és így invertálható. Mi lesz az inverzének a deriváltja az $1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

2. (a) Legyen $f(x) = e^{-3x} + \ln(1+2x) - \sin(7x)$. Számoljuk ki $f^{(n)}(0)$-t minden $n \in \mathbb{N}$-re!

   (b) Legyen $f(x) = x(2x+1)(3x+2)(4x+4)(5x+2^3)\cdots(102x+2^{100})$, és $g = f \circ f \circ f$. Mennyi $g'(0)$ értéke?

3. (a) Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ függvény azon érintőegyenese(i)nek egyenletét, amely(ek) párhuzamos(ak) az $y = -\frac{1}{2}x + 5$ egyenessel.

   (b) Tekintsük a $\frac{y^2}{2} + \ln(e^y + x^2 - 1) = 0$ implicit alakban adott görbét! Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0) = (1, 0)$ pont illeszkedik a görbére! Mi ebben a pontban a görbét érintő egyenes egyenlete? Ebben a pontban lokálisan konvex vagy lokálisan konkáv az implicit egyenlet által meghatározott $y(x)$ függvény?

4. Vizsgáljuk a $x = t^3 + 2t^2 + 3, y = t^3 - 2t + 5$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét a $t_0 = -2$ paraméterű pont környezetében (érintő meredeksége, konvexitás, görbület). Írjuk fel itt az érintőegyenes egyenletét (Descartes koordinátákban)! Mely pont(ok)ban párhuzamos az érintőegyenes a $2y - x = 3$ egyenessel?

5. (a) Adjuk meg az $r = 3\cos\varphi$ polárkoordinátásan adott görbe egyenletét Descartes-koordinátákban, és állapítsuk meg, hogy milyen görbéről van szó.

   (b) Keressük meg az $r = e^{\varphi}$ polárkoordinátásan adott görbe vízszintes és függőleges érintőjű helyeit, és egy-egy ilyen pontban írjuk is fel az érintőegyenes egyenletét (Descartes koordinátákban)! Adjuk meg tetszőleges φ paraméterhez tartozó pontban az érintőegyenes meredekségét.

6. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) =?$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} =?$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} =?$

7. Az $y = \ln x$ $(x > 0)$ görbe melyik pontjában lesz maximális illetve minimális a görbület? Az egyik ilyen pontban írjuk fel a simulókör egyenletét!

8. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot (értelmezési tartomány, értékkészlet, limeszek, menettulajdonságok, szélsőértékek, alaki tulajdonságok, aszimptoták) az alábbi függvényekre. Állapítsuk meg, van-e (és ha igen, mennyi) véges abszolút maximumuk, illetve minimumuk.

   (a) $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$, (b) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+2}\right)$, (c) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$

9. Emlékeztető az előadásról: ha I intervallum, akkor egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz választható egy $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges $x_1 \in I$ és $x_2 \in I$ esetén, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Szerepelt továbbá a Heine tétel, mely szerint amennyiben f folytonos és az értelmezési tartomány $I = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, akkor f egyenletesen folytonos.

   (a) Legyen $f(x) = x^p$, ahol $p > 0$ és $I = [0, 3]$. Ekkor f a Heine tétel értelmében egyenletesen folytonos. Hogyan kell ε-hoz δ-t választani?

   (b) Legyen $f(x) = x^p$, ahol $p > 0$ és $I = [0, +\infty)$. Milyen p-re lesz ekkor f egyenletesen folytonos?

10. Előadáson szerepeltek az $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ és a $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvények: segítségükkel definiáljunk további két hiperbolikus függvényt: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ és $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

    (a) Adjuk meg $\operatorname{th} x$ és $\operatorname{cth} x$ (lehetséges legbővebb) értelmezési tartományát, értékkészletét; vázoljuk grafikonjaikat, vizsgáljuk a határértékeiket $\pm\infty$-ben és az értelmezési tartomány egyéb határpontjaiban.

    (b) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{th} x$ és $\operatorname{cth} x$ invertálhatóak, válaszoljunk az (a) feladat kérdéseire az inverzeik, $\operatorname{arth} x$ és $\operatorname{arcth} x$ esetében is.

    (c) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ és $\operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

    (*Útmutatás*: fejezzük ki $\operatorname{th} x$-t és $\operatorname{cth} x$-t e^{2x} segítségével.)

11. Előadáson szerepelt az $x(t) = R(t - \sin t)$; $y(t) = R(1 - \cos t)$ $(t \in \mathbb{R})$ paraméteres alakban megadott görbe, a *ciklois*, amely egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő R sugarú (kör alakú) kerék egy adott pontjának mozgását írja le. Mutassuk meg, hogy minden t időpontban a keréknek az egyenessel éppen érintkező pontja rajta fekszik a ciklois t időponthoz tartozó normális egyenesén (az érintőegyenesre merőleges egyenesen).

12. * Tekintsük az $A = (-1, 0)$ és a $B = (1, 0)$ koordinátájú pontokat, és jelölje a sík egy tetszőleges P pontjára az AP, illetve BP szakaszok hosszát d_1, illetve d_2. Azok a P pontok, melyekre $d_1 \cdot d_2 = 1$, egy görbén fekszenek; ezt a görbét *lemniszkátá*nak hívják. Mutassuk meg, hogy polárkoordinátákban a lemniszkáta egyenlete $r = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$. (*Útmutatás*: Egy lehetőség, hogy O-val jelölve az origót, felírjuk a koszinusz tételt a AOP és BOP háromszögekre. De lehet Descartes koordinátákban is számolni, és a végén áttérni polárra.) Milyen φ értékekre értelmes ez a képlet, és milyen φ-re lesz a lemniszkáta érintője vízszintes? (Pontozáson kívül: érdemes vázolni a görbét, ehhez, akinek van kedve, használhat valamilyen matematikai szoftvert is.)

13. Tekintsük a $Q(x) = x^5 - 5x + 2$ polinomot. Mutassuk meg, hogy $Q(x)$-nek pontosan három valós gyöke van. (*Útmutatás*: Bolzano tételét és egyéb az előadáson szereplő állítást lehet jól használni.)

14. * Legyen $[a, b]$ korlátos zárt intervallum, és $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény (tehát $a \le f(x) \le b$ minden $x \in [a, b]$ esetén). Bizonyítsuk be, hogy ekkor van (legalább egy) olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = c$, vagyis f-nek van legalább egy fixpontja. (*Útmutatás*: Alkalmazzuk Bolzano tételét a $g(x) = f(x) - x$ függvényre.) Mutassunk példát rá, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor lehet, hogy egy fixpontja sincs.