Beadandó házi feladatok

2. sorozat (beadási határidő 2017. 10. 16. hétfő 16:00 H607) 8 feladat beadása kötelező.

1. Mutassuk meg, hogy az $a_1 = \frac{1}{2}$, $\quad a_{n+1} = \frac{3}{4-a_n}, n = 1, 2, \ldots$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét. (Szorgalmi feladat plusz pontokért: Legyen $a_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Hogyan viselkedik a sorozat? Állításunkat indokoljuk.)

2. Legyen $a > 1$ rögzített. Igazoljuk, hogy a
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3b_n + \frac{a}{b_n^3}\right); \qquad b_1 = 1$$
rekurzív formulával definiált sorozat konvergens, és határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ értékét.

   (*Útmutatás. Első lépésként vizsgálhatjuk a sorozat viselkedését egy konkrét $a > 1$ értékre, pl. $a = 2$-re. A korlátosság bizonyításához használjuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.*)

3. (a) Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit a megfelelő helyeken.
$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^7+6x^4+1)$, $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-15}$, $\lim\limits_{x\to 5+}\frac{[6-x]}{2+\{3x\}}$, $\lim\limits_{x\to 5-}\frac{[6-x]}{2+\{3x\}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(9x^2)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

   (b) Definiáljuk a következő fogalmakat: $\lim\limits_{x\to 5+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

4. Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit a megfelelő helyeken.
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

5. Tekintsük a következő valós változós, valós értékű függvényeket. Határozzuk meg a (lehetséges legbővebb) értelmezési tartományt, az értékkészletet, és vázoljuk a grafikont. Invertálhatóak-e a függvények? Ha igen, határozzuk meg az inverzüket. Ha nem, lehetséges-e a függvényt megszorítani egy korlátos intervallumra úgy, hogy a megszorítás már invertálható legyen?

   (a) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$,

   (b) $f(x) = 2\operatorname{tg} 3x - 1$,

   (c) $f(x) = 3\{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\} + 1$. Itt $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét jelöli.

6. Osztályozzuk a következő függvény szakadási helyeit az A, B, C valós paraméterek minden értékére:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{x+1} & \text{ha } x < -1, \\ B\operatorname{sgn} x & \text{ha } -1 \le x < \pi, \\ C & \text{ha } x = \pi, \\ \frac{\sin x}{x-\pi} & \text{ha } x > \pi. \end{cases}$$

7. (a) Írjuk fel $f(x) = (\operatorname{arctg}(2x))^{\cos(\pi x)} + \frac{\ln(2x)}{\sqrt[3]{\arcsin(2x^2)}} + \log_x x$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban!

   (b) Pistike ceruzájának hegye a $(4, 0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokos szögben kell elindítania a ceruzáját?

8. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2(\sqrt{x}) & \text{ha } x>0,\\ A-\operatorname{arctg}\sqrt{3} & \text{ha } x=0,\\ B\operatorname{sh}x+C & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Hogyan válasszuk meg az A, B, C paraméterek értékét, hogy az $f(x)$ függvény minden $x\in\mathbb{R}$ pontban differenciálható legyen? Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

9. (a) $f(x)=|x-1|\sin(2x-2)$. $f'(x)=?$ (Az $x<1$, $x>1$ eseteket vizsgáljuk külön, $x=1$-ben használjuk a definíciót).

(b) $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=?$ ($x=0$-ban használjuk a definíciót.)

10. Adjuk meg $f(x)=\sqrt[3]{22+4x^2+x^4}$ értelmezési tartományát, értékkészletét! Szorítsuk meg a (lehetséges legbővebb) $x_0=2$ pontot tartalmazó intervallumra úgy, hogy invertálható legyen. Mennyi az *inverz függvény* deriváltja a 3 pontban?

11. $f(x)=\arcsin(\sqrt{\frac{1}{2}+4x^4})$ Adjuk meg az értelmezési tartományát és értékkészletét! Igazoljuk, hogy a $[0,\frac{1}{\sqrt[4]{8}}]$ intervallumra megszorítva a függvény invertálható! (Invertálható-e ennél bővebb halmazon?) Mennyi lesz az inverzének a deriváltja az $y_0=\frac{\pi}{3}$ pontban?

12. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{ha } x\neq 0,\\ 0 & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény minden $x\in\mathbb{R}$ esetén differenciálható (számoljuk ki a deriváltját), de a deriváltfüggvénye nem folytonos a 0-ban.

13. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{\cos\frac{2}{n}}-\sqrt{\cos\frac{1}{n}}\right)=?$ (Emlékeztető: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.)

(b) Az $\alpha>0$, $\beta>0$ paraméterek minden lehetséges értéke mellett határozzuk meg a következő határértéket: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\sin(\frac{\alpha}{n})\right)^{1/(1-\cos(\frac{\beta}{n}))}$.

(*Útmutatás: Használjuk a* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ *határértékeket és a köv. állítást: Ha* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ *vagy* $-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$ *vagy* $-\infty$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=c$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{b_n}=e^c$.)

(c) Határozzuk meg $\liminf a_n$-t és $\limsup a_n$-t, ha $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$.

14. (a) Igazoljuk, hogy $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ minden $x>0$-ra.

(b) Igazoljuk, hogy $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ minden $x<0$-ra.

(c) (*) Adjunk példát olyan függvényre, amely az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett, de csak egy pontban folytonos.

15. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $|a_{n+1}-a_n|\le 2^{-n}$ minden n-re, akkor a_n konvergens.

(b) (*) Tegyük fel, hogy $b_{n+1}-b_n\to 0$. Következik-e ebből, hogy $b_{3n}-b_n\to 0$?

(c) (*) Mutassunk példát olyan sorozatra, hogy $c_n\to+\infty$, és $c_{2n}-c_n\to 0$.

16. Emlékeztető az előadásról: ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges $x_1 \in I$ és $x_2 \in I$ esetén, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Szerepelt továbbá Heine tétele, amely szerint, ha f folytonos és az értelmezési tartomány $I = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, akkor f egyenletesen folytonos.

(a) Legyen $f(x) = x^3$ és $I = [-2, 2]$, ekkor f a Heine tétel értelmében egyenletesen folytonos. Hogyan kell ε-hoz δ-t választani?

(b) Legyen $f(x) = x^3$ és $I = [0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy f *nem* egyenletesen folytonos.

(c) (*) Legyen most $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos függvény, melyre $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ létezik és véges. Mutassuk meg, hogy f egyenletesen folytonos.