4. gyak /10. Mo

$f(x)=\sqrt{1+x^4}$ páros fv, mert $\sqrt{1+x^4}=\sqrt{1+(-x)^4}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, hiszen x^4 páros fv.

Így $f(x)$ csak $[0,+\infty)$-en v. $(-\infty,0]$-n v. ezek részhalmazán lehet invertálható. Ezeken f szigorúan monoton, így invertálható is.

$$\left(f\big|_{[0,+\infty)}^{-1}\right)'(\sqrt{2})=\,?$$

1. Mo
$$y=f(x)=\sqrt{1+x^4},\quad x\geq 0$$
$$y^2=1+x^4$$
$$y^2-1=x^4,\quad x\geq 0$$
$$f\big|_{[0,+\infty)}^{-1}(y)=\sqrt[4]{y^2-1}=x$$
Így
$$\left(f\big|_{[0,+\infty)}^{-1}\right)'(y)=\left((y^2-1)^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}(y^2-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2y$$
$$\left(f\big|_{[0,+\infty)}^{-1}\right)'(\sqrt{2})=\frac{1}{4}(2-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Mo Továbbiakban $f\big|_{[0,+\infty)}$-t is egyszerűen f-fel jelöljük az egyszerűség kedvéért.

$$(f^{-1})'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{2}))}$$ (inverz fv. deriválási szabálya szerint)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}4x^3=\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

$f^{-1}(\sqrt{2})=\,?$ $\quad f(x)=\sqrt{1+x^4}=\sqrt{2},\ x\geq 0 \rightarrow x=1 \Rightarrow f^{-1}(\sqrt{2})=1$

$$f'(f^{-1}(\sqrt{2}))=\frac{2}{\sqrt{2}},\qquad \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{2}))}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(f\big|_{[0,+\infty)}^{-1}\right)'(\sqrt{2})$$

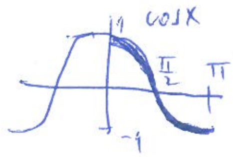
Megj. $\left(f\big|_{(-\infty,0]}^{-1}\right)'(\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ szimmetria okokból

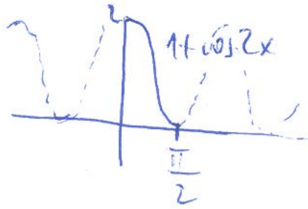
4. gyak / 11. Mo

Láttuk, h. $f(x) = 1 - \cos(2x - \pi) = 1 + \cos 2x$, ez invertálható

pl. a $2x \in [0, \pi]$, azaz $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon.

(Ennél hosszabb intervallumon nem lehet invertálni.)





1. Mo

$f(x) = 1 + \cos 2x = y, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos 2x = y - 1 \qquad \cos 2x \in [0, \pi]$, így

$2x = \arccos(y-1)$

$x = \frac{\arccos(y-1)}{2} = f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}^{-1}(y)$

$(f^{-1})' = \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}, \quad (f^{-1})'(1) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

2. Mo

$f(x) = 1 + \cos 2x = 1, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 2x \in [0, \pi]$

(f értéke hol $= 1$?) $\quad \cos 2x = 0, \; 2x \in [0, \pi] \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{-2} = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$

$f'(x) = -\sin(2x) \cdot 2$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) \cdot 2 = -2$

Megj. Ha $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ int-ban invertálnánk, akkor $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$

$[\frac{\pi}{2}, \pi]$ —||— $= \frac{1}{2}$

$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ —||— $= -\frac{1}{2}$ stb.