Dr. Alex Küronya Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

6. Blatt

Abgabetermin: Mi, 29.6.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Es sei S eine affine Halbgruppe, und $V = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$ die zugehörige affine torische Varietät.

Aufgabe 6-1
Es sei $\sigma_i \subseteq (N_i)_{\mathbb{R}}$ stark konvexe RP Kegel, $\overline{\phi} : N_1 \to N_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Man beweise, daß $\phi : T_1 \to T_2$ sich genau dann zu einem Morphismus von torischen Varietäten $\phi : U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$ erweitert, wenn $\overline{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2$.

Aufgabe 6-2 (Normalisierung von ATV)
Es sei S eine affine Halbgruppe, $V = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$ die zugehörige ATV, M, T wie üblich. Man bezeichne durch $\operatorname{Cone}(S)$ der Kegel über ein endliches Erzeugendersystem von S, es sei $\sigma = \operatorname{Cone}(S)^\vee$. Man beweise die folgende Tatsachen.

(1) $\operatorname{Cone}(S)$ hängt wirklich nur von S, und nicht die Wahl des endlichen Erzeugendersystems ab.
(2) $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ist ein stark konvexer RP Kegel.
(3) die Inklusion $\mathbb{C}[S] \hookrightarrow \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ induziert einen Morphismus $U_\sigma \to V$, der die Normalisierungsabbildung ist.
(4) der obengenannte Morphismus ist torisch.

Aufgabe 6-3
Man gebe alle torische Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Aufgabe 6-4
Man betrachte den Kegel $\sigma = \operatorname{Cone}(3e_1 - 2e_2, e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Man beschreibe $\sigma^\vee$, und finde die Hilbert-Basis von $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$. Man berechne das torische Ideal von U_σ.

Aufgabe 6-5
Man wiederhole die vorige Aufgabe für den Kegel $\sigma = \operatorname{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_2 + 2e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6-6
Es sei $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein glatter RP Kegel. Man zeige, daß die Strahlengeneratoren auch die Halbgruppe $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ erzeugen.

Hausaufgaben

Aufgabe 6-7
Es sei $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (konvexer) polyhedraler Kegel. Man zeige, daß $W \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma^\vee)^\perp$ der größte lineare Unterraum von σ ist. Man beweise, daß $\sigma/W \subseteq \mathbb{R}^n/W$ ein stark konvexer polyhedraler Kegel ist.

Aufgabe 6-8 *
Es seien $N' \subseteq N$ Gitter so daß die Index $|N : N'| < \infty$. Man wähle einen stark konvexen RP Kegel $\sigma \subseteq N'_{\mathbb{R}}$, und beweise die folgende Tatsachen.

(1) Es gibt Isomorphismen $G \stackrel{\text{def}}{=} N/N' \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^\times) = \ker(T_N \to T_{N'})$.
(2) G operiert auf $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']$, und der Invariantenring ist $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$.