Dr. Alex Küronya Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

5. Blatt

Abgabetermin: Mi, 22.6.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Es sei S eine affine Halbgruppe, und $V = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$ die zugehörige affine torische Varietät.

Aufgabe 5-1
Man nehme einen (multiplikativen) Halbgruppenhomomorphismus $\gamma : S \to \mathbb{C}$. Man beweise, daß $\phi_{p_\gamma} = \gamma$ ist.

Aufgabe 5-2
Es sei $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subseteq S$ ein Erzeugendersystem. Man zeige, daß die Nacheinanderschaltung

$$V \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathrm{sgp}}(S, \mathbb{C}) \longrightarrow Y_{\mathcal{A}}$$

gegeben durch

$$p \mapsto (m \mapsto \chi^m(p)) \mapsto (\gamma(m_1), \ldots, \gamma(m_s))$$

ein Isomorphismus von Varietäten ist.

Aufgabe 5-3
Ist $t \in T$, und entspricht $p \in V$ dem Halbgruppenhomomorphismus $\gamma : S \to \mathbb{C}$, entspricht dann der Punkt $t \cdot p \in V$ dem Homomorphismus

$$m \mapsto \chi^m(t) \cdot \gamma(m) \ .$$

Aufgabe 5-4
Man beweise, daß die Torusoperation $\alpha : T \times V \to V$ dem $\mathbb{C}$-algebrahomomorphismus bestimmt durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[S] & \longrightarrow & \mathbb{C}[M] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S] \\ \chi^m & \mapsto & \chi^m \otimes \chi^m \end{array}$$

entspricht.

Aufgabe 5-5
Es sei $V = U_\sigma$ für einen stark konvexen RP Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$.

(1) Die Torusoperation auf U_σ hat einen Fixpunkt dann und genau dann, wenn $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$;
(2) in dem Fall ist der Fixpunkt eindeutig bestimmt, und gegeben durch das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} \ = \ \langle \chi^m \,|\, m \in S_\sigma \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}[S_\sigma] \rangle \ .$$

Aufgabe 5-6

Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein stark konvexer RP Kegel von maximaler Dimension, $S_\sigma \overset{\text{def}}{=} \sigma^\vee \cap M$. Man beweise die folgende:

(1) die Hilbert-Basis $\mathcal{H}$ von S_σ ist ein endliches Erzeugendersystem;
(2) $\mathcal{H}$ enthält alle Strahlgeneratoren von σ;
(3) $\mathcal{H}$ ist das minimale Erzeugendersystem von S_σ bezüglich $\subseteq$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5-7

Es sei X eine affine Varietät (irreduzibel), $p \in V$. Dem Punkt p entsprechen zwei maximale Ideale: $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathbb{C}[X]$, und $\mathfrak{m}_{X,p} \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$. Man zeige, daß die natüerliche $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{V,p}/\mathfrak{m}_{V,p}^2$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 5-8

Es sei $p \in V = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$, und $\gamma : S \to \mathbb{C}$ der zugehörige Halbgruppenhomomorphismus. Man beweise, daß $p \in T$ dann und genau dann wenn γ gar nicht auf S verschwindet.

Aufgabe 5-9 *

Es sei N ein Gitter, $u \in N$ ein primitives Element, $N_1 \subseteq N$ ein Untergitter.

(1) Ist N/N_1 torsionsfrei, dann gibt es einen Untergitter $N_2 \subseteq N$ mit er Eigenschaft $N = N_1 \oplus N_2$.
(2) Man zeige, daß N eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ hat, für welche $e_1 = u$ ist.