Dr. Alex Küronya Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

3. Blatt

Abgabetermin: Mi, 8.6.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Aufgabe 3-1
Es sei V eine affine Varietät, $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[V]$. Daraus ergibt sich eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : V & \longrightarrow & \mathbb{C}^s \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_s(x)) \end{array}$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{rcl} \Phi^* : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s] & \longrightarrow & \mathbb{C}[V] \\ x_i & \mapsto & f_i \ . \end{array}$$

Man zeige, daß $I(\overline{\operatorname{im}\Phi}) = \operatorname{Ker}\Phi^*$.

Aufgabe 3-2
Es sei T ein Torus, $M = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{C}^\times)$ die Charaktergruppe von T, $N = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^\times, T)$. Wir betrachten die Operation von T auf N durch Multiplikation, und die duale Operation

$$t \cdot f : x \mapsto f(t^{-1} \cdot x)$$

von T auf $\mathbb{C}[M]$. Man beweise, daß die obige Funktion in der Tat eine Gruppenoperation von T auf $\mathbb{C}[M]$ ist. In welchem Sinne sind die Operationen von T auf N und $\mathbb{C}[M]$ dual zueinander?

Aufgabe 3-3
Man nehme einen Torus T mit Charaktergitter M. Dann gibt es für jeden Punkt $t \in T$ die Bewertungsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi_t : M & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ m & \mapsto & \chi^m(t) \ . \end{array}$$

Man zeige, daß die Funktion $t \mapsto \phi_t$ einen Gruppenisomorphismus $T \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^\times)$ induziert.

Aufgabe 3-4
Man betrachte die affine Halbgruppe $S \subseteq \mathbb{N}^2$ erzeugt von den Elementen $(1, 0)$ und $(0, 2)$.

Bestimmen wir die zugehörige affine torische Varietät. Man tue das gleiche für das Erzeugersysteme $\{(1,-1),(1,1)\}$, und $\{(2,0),(0,2)\}$.

Aufgabe 3-5 (Die universelle Eigenschaft des Halbgruppenrings)
Man betrachte eine Halbgruppe S, einen kommutativen Ring (mit 1), und den zugehörigen Halbgruppenring $R[S]$. Man zeige, daß die Einbettung $\iota : S \hookrightarrow R[S]$ die folgende universelle Eigenschaft hat: für jede R-Algebra A und jeden multiplikativen Halbgruppenhomomorphismus $\phi : S \to A$ gibt es genau einen R-Algebra-Homomorphismus $\psi : R[S] \to A$ für welche

$$\phi = \psi \circ \iota$$

gilt.

Aufgabe 3-6
Es seien S_1, und S_2 Halbgruppen, R ein kommutativer Ring, $\phi : S_1 \to S_2$ ein Halbgruppenhomomorphismus. Man beweise, daß ϕ einen eindeutig bestimmten R-Algebra-Homomorphismus $\widetilde{\phi} : R[S_1] \to R[S_2]$ bestimmt. Man zeige auch, daß $\widetilde{\phi}$ injektiv ist falls ϕ injektiv ist.

Aufgabe 3-7
Es sei $\Phi : T_1 \to T_2$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen Tori, man bezeichne $M_i \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(T_i)$. Dann induziert Φ Abbildungen (durch Nacheinanderschaltung) $\hat{\Phi} : M_2 \to M_1$ und $\Phi^* : \mathbb{C}[M_2] \to \mathbb{C}[M_1]$. Man beweise, daß Φ^* der Homomorphismus zwischen Halbgruppenringalgebren ist, der von dem Halbgruppenhomomorphismus $\hat{\Phi}$ induziert wird.

Hausaufgaben

Aufgabe 3-8
Es sei T ein Torus, U ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\rho : T \to \mathrm{GL}(U)$ eine linear Gruppenoperation. Man zeige, daß die lineare Abbildungen $\rho(t)$ (für $t \in T$) sind alle und noch dazu gleichzeitig diagonalisierbar.

Aufgabe 3-9 *
Man betrachte eine Torusoperation auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum wie in der obigen Aufgabe. Es sei $M \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(T)$ der Charaktergitter, $m \in M$. Man bezeichne

$$U_m \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \,|\, t \cdot u = \chi^m(t) u \;\forall t \in T\} \; .$$

Man zeige, daß $U = \oplus_{m \in M} U_m$.