
Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

2. Blatt

Abgabetermin: Mi, 1.6.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Aufgabe 1-1
Es sei $T = (\mathbb{C}^\times)^2$, $M = \mathbb{Z}^2$ die zugehörige Charaktergruppe, und

$$\mathcal{A}_1 \;=\; \{(2,0),(1,1),(1,3)\} \;\;,\;\; \mathcal{A}_2 \;=\; \{(3,0),(1,1),(0,3)\}$$

zwei endliche Untermengen. Man zeige, daß

$$Y_{\mathcal{A}_1} \;=\; Y_{\mathcal{A}_2} \;=\; V(xz-y^3) \;\subseteq\; \mathbb{C}^3 \;.$$

Welche der Abbildungen (betrachtet als eine Funktion $\mathbb{C}^2 \to V(xz-y^3)$) ist surjektiv?

Aufgabe 1-2
Es sei T ein Torus, M die Charaktergruppe von T, $\mathcal{A} \subseteq M$ eine endliche Menge. Man betrachte einen Gruppenisomorphismus $f : M \to M$, und beweise, daß $Y_{\mathcal{A}}$ und $Y_{f(\mathcal{A})}$ isomorph sind. Was kann man sagen, wenn f nur ein Gruppenhomomorphismus ist?

Definition. Ein kommutative Halbgruppe (mit Identität) S heißt *affine Halbgruppe*, wenn sie endlich erzeugt ist, und es einen injektiven Homomorphismus $\phi : S \hookrightarrow G$ in eine Gruppe gibt.

Aufgabe 1-3
Man zeige, daß die zwei Bedingungen in der Definition einer affinen Halbgruppe unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 1-4
Man beweise, daß eine endliche erzeugte Halbgruppe S genau dann affin ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) S ist torsionsfrei (daß heißt, aus $ns = nt$ folgt $s = t$ für alle $s,t \in S$ und $n > 0$);
(2) für alle $s,t,u \in S$ gilt $s+u = t+u \;\Rightarrow s = t$.

Aufgabe 1-5
Man betrachte die torische Varietät X, die aus der Abbildung

$$\Phi : (s,t) \mapsto (s^4, s^3t, st^3, t^4) \in \mathbb{C}^4$$

kommt. Man zeige, daß für das Ideal $I(X)$
$$I(X) = (xw - yz, yw^2 - z^3, xz^2 - y^2w, x^2z - y^3) \subseteq \mathbb{C}[x,y,z,w]$$
gilt.

Hausaufgaben

Definition. Eine algebraische Gruppe G ist eine d-*Gruppe*, wenn $\mathbb{C}[G]$ eine Basis aus Charakteren hat.

Aufgabe 1-6
Man zeige, daß die Gruppe $D(n, \mathbb{C})$ (die Menge aller invertierbaren diagonalen Matrizen) eine d-Gruppe ist.

Aufgabe 1-7
Es sei G, G' d-Gruppen, $\phi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus (im Sinne von algebraischen Gruppen). Man zeige, daß ϕ einen Gruppenhomomorphismus $\hat{\phi} : \Xi(G') \to \Xi(G)$ induziert. Umgekehrt, beweise man, daß ein Gruppenhomomorphismus $\Xi(G') \to \Xi(G)$ einen Morphismus von algebraischen Gruppen $G \to G'$ ergibt.

Aufgabe 1-8
Es sei G eine d-Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G. Man zeige, daß H auch eine d-Gruppe ist.

Aufgabe 1-9 *
Man beweise, daß eine d-Gruppe immer diagonalisierbar ist.