Dr. Alex Küronya Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

1. Blatt

Abgabetermin: Mi, 25.5.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Aufgabe 1-1 (Lineare Unabhängigkeit der Charakteren)
Sei G eine (abstrakte) Gruppe, $\Xi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ die Menge aller Homomorphismen von G nach $\mathbb{C}^*$. Man beweise, daß $\Xi(G)$ eine linear unabhängige Menge im Vektorraum aller Funktionen $G \to \mathbb{C}^*$ ist.

Definition. Es sei G eine Gruppe, X eine Menge. Eine *Gruppenoperation* ist eine Abbildung

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X$$

so daß

(1) $\alpha(1_G, x) = x$ für jedes $x \in X$, und
(2) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Für Elemente $x \in X$ führen wir die folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} Gx &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha(g,x) \,|\, g \in G\} \text{ heißt die } \textit{Bahn} \text{ von } x, \\ G_x &\stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \,|\, \alpha(g,x) = x\} \text{ ist die } \textit{Standgruppe} \text{ von } X\ . \end{aligned}$$

Die Gruppenoperation α wird oft nur als

$$g \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(g, x)$$

geschrieben. Mit dieser Schreibweise sind die definierenden Eigenschaften

$$1_G \cdot x = x \quad \text{und} \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x\ .$$

Aufgabe 1-2 (Gruppenoperationen)
a) Man beweise, daß eine Gruppenoperation $\alpha : G \times X \to X$ äquivalent zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\widetilde{\alpha} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$$

ist, wobei $\mathrm{Aut}(X)$ die Automorphismengruppe der Menge X kennzeichnet.
b) Für alle $x, y \in X$ in einer α-Bahn sind die Standgruppen G_x und G_y konjugiert.

c) Man zeige, daß X die disjunkte Vereinigung der α-Bahnen ist.
d) Man beweise, daß für jedes Element $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X \\ g & \mapsto & \alpha(g,x) \end{array}$$

eine Bijektion

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$$

induziert, wobei G/G_x die Menge der Linksnebenklassen ist.
e) (Bahnengleichung) Man nehme an, daß die Gruppe G endlich ist. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Vertretersystem der Bahnen von X. Dann gilt

$$|X| \;=\; \sum_{i=1}^{n} |Gx_i| \;=\; \sum_{i=1}^{n} |G : G_{x_i}| \;.$$

Aufgabe 1-3 Es sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein irreduzibler Unterraum. Man zeige, daß jeder Unterraum $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ irreduzibel ist.

Definition. Ein Endomorphismus ϕ des endlich-dimensionalen Vektorraums V über einen Körper k heißt *halbeinfach (semisimple)*, falls das Minimalpolynom von ϕ über k paarweise verschiedene Wurzel hat. Der Endomorphismus ϕ heißt *nilpotent*, wenn $\phi^m = 0 \in \mathrm{End}_k(V)$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1-4 Man zeige, daß ϕ wie oben genau dann halbeinfach ist, wenn es diagonalisierbar über k ist. Man beweise auch, daß ϕ genau dann nilpotent ist, wenn $0 \in k$ der einzige Eigenwert von ϕ ist.

Aufgabe 1-5 (Additive Jordan–Chevalley Zerlegung)
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einen algebraisch abgeschlossenen Körper[1] k, $\phi \in \mathrm{End}_k(V)$. Beweisen Sie die folgendes:
a) Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $\phi_s, \phi_n \in \mathrm{End}_k(V)$, so daß ϕ_s halbeinfach und ϕ_n nilpotent ist,

$$\phi \;=\; \phi_s + \phi_n \;,$$

und es gilt

$$\phi_s \circ \phi_n \;=\; \phi_n \circ \phi_s \;.$$

b) Es gibt Polynome $p(X), q(X) \in k[X]$ ohne konstanten Term mit den Eigenschaften

$$\phi_s \;=\; p(\phi) \;,\; \phi_n \;=\; q(\phi) \;.$$

Insbesondere, kommutieren ϕ_s und ϕ_n mit allen Endomorphismen von V, die mit ϕ kommutieren.
c) Für Unterräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $\phi(W) \subseteq U$ gilt auch

$$\phi_s(W) \;\subseteq\; U \quad \text{und} \quad \phi_n(W) \;\subseteq\; U \;.$$

[1] Die Zerlegung existiert unter der Annahme, daß k perfekt ist.

d) Für $\psi \in \mathrm{End}_k(V)$ mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ hat man auch

$$(\phi + \psi)_s \;=\; \phi_s + \phi_s \quad \text{und} \quad (\phi + \psi)_n \;=\; \phi_n + \phi_n \ .$$

Hausaufgaben

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einen Körper k. Ein invertierbarer Endomorphismus $\phi \in \mathrm{GL}_k(V)$ heißt *unipotent*, falls von der Form

$$\phi \;=\; \mathrm{id}_V + \nu$$

ist, mit $\nu \in \mathrm{End}_k(V)$ nilpotent.

Aufgabe 1-6 Zeigen Sie, daß ϕ wie oben genau dann unipotent ist, wenn der einzige Eigenwert von ϕ die Zahl $1 \in k$ ist. Was sind die Endomorphismen die gleichzeitig halbeinfach und unipotent sind?

Aufgabe 1-7 (Multiplikative Jordan–Chevalley Zerlegung) Es sei $\phi \in \mathrm{GL}_k(V)$, V endlich-dimensional über den algebraisch abgeschlossenen Körper k. Man beweise die folgenden Tatsachen.
a) Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $\phi_s, \phi_u \in \mathrm{GL}_k(V)$, so daß ϕ_s halbeinfach und ϕ_n unipotent ist,

$$\phi \;=\; \phi_s \circ \phi_u \ ,$$

und es gilt

$$\phi_s \circ \phi_u \;=\; \phi_u \circ \phi_s \ .$$

b) Die Endomorphismen ϕ_s und ϕ_u kommutieren mit allen Endomorphismen von V, die mit ϕ kommutieren.
c) Für Unterräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $\phi(W) \subseteq U$ gilt auch

$$\phi_s(W) \;\subseteq\; U \quad \text{und} \quad \phi_u(W) \;\subseteq\; U \ .$$

d) Für $\psi \in \mathrm{GL}_k(V)$ mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ hat man auch

$$(\phi + \psi)_s \;=\; \phi_s + \psi_s \quad \text{und} \quad (\phi + \psi)_u \;=\; \phi_u + \psi_u \ .$$

Aufgabe 1-8 * Es sei $\phi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Morphismus von Varietäten, der auch ein Gruppenhomomorphismus ist. Man zeige, daß ϕ von der Form $t \mapsto t^a$ ist für ein $a \in \mathbb{Z}$.