Alkalmazott algebra zárthelyi, 2011. október 27.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   Mindegyik mátrix szimmetrikus, így mindegyik normális. A_1 első két sora lineárisan összefügg , ezért A_1 elfajuló, így A_1 nem lehet definit. A_4, illetve A_5 főátlójában van nem-pozitív elem, így ezek sem pozitív definitek. A_2-re, illetve A_3-ra a Gram-Schmidt–ortogonalizáció egy lépésben a $\mathrm{diag}(1, 5, 7)$ diagonális mátrixot adja, pozitív elemekkel a főátlóban, így ezek a mátrixok pozitív definitek.

2. *Az alábbi mátrixok közül melyek irreducibilisek, melyek primitívek?*
$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Legyen G_{B_ℓ} az az irányított gráf, amelyben $j \to i$ olyan i, j-re él, hogy B_ℓ i-edik sorának j-edik eleme pozitív. $G_{B_1}, G_{B_2}, G_{B_5}$ erősen összefüggőek, tehát B_1, B_2 és B_5 irreducibilisek. G_{B_3}-ban a $\{3\}$ és a $\{3, 4\}$ halmazokból, míg G_{B_4}-ben az $\{1, 3\}$ és a $\{2, 4\}$ csúcshalmazokból nem vezet ki él, ezért B_3 és B_4 reducibilisek. Az irreducibilisek közül B_2-ben van diagonális elem, ezért primitív, G_{B_5}-ben pedig van 3 és 4 hosszú irányított kör, így az irányított körök hosszaink lnko-ja 1, ezért B_5 szintén primitív. G_{B_1} pedig egy két színnel színezhető gráf (csillag), oda-vissza irányított élekkel. G_{B_1}-ben tehát nincs páratlan kör, emiatt B_1^2 reducibilis, és így B_1 imprimitív.

3. *Adjuk meg azt $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az Ax távolsága a $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ vektortól a lehető legkisebb, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

   A oszlopai 2 hosszú, egymásra merőleges vektorok, így A (egyik lehetséges) SVD-je $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ezért $A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$. (Az SVD-re tanult általános módszerrel: $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ már diagonális, tehát - többek között - az $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ egységmátrix diagonalizálja. Ha ezt választjuk, az általános eljárást folytatva szintén a fenti SVD-re jutunk. Ha más ortogonális mátrixot választunk, az SVD más lesz, de ugyanazt az A^+-t adja.) A legkisebb négyzetes hibáról tanultak alapján a megoldás egyértelmű (mivel A oszlopai lineárisan függetlenek) és az $A^+ b = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. *Legyen A egy $n \times n$-es komplex elemű mátrix és B az $\begin{pmatrix} & A \\ A & \end{pmatrix}$ alakú $2n \times 2n$-es mátrix, ahol az üresen hagyott helyeken csupa 0 áll. Mi az összefüggés A és B sajátértékei között? (Multiplicitások vizsgálata nem része a feladatnak.)*

   A $0 \neq w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $(u, v \in \mathbb{C}^2)$ vektor akkor és csak akkor sajátvektora B-nek λ sajátértékkel, ha $Aw = \lambda w$, azaz $Av = \lambda u$ és $Au = \lambda v$. A $\lambda = 0$ esetben ez azzal egyenértékű, hogy $Av = Au = 0$. Innen 0 akkor és csak akkor sajátértéke B-nek, ha A-nak is. A $\lambda \neq 0$ esetben a két egyenlőség azzal helyettesíthető, hogy $u = \frac{1}{\lambda} Av$ és $A^2 v = \lambda^2 v$. Tehát $\lambda \neq 0$ akkor és csak akkor sajátértéke B-nak, ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, ami azzal egyenértékű, hogy λ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak. (Pl. a Schur-felbontásból látható, hogy A^2 sajátértékei A sajátértékeinek a négyzetei.) A megoldás tehát: B sajátértékei A sajátértékei ± 1-gyel megszorozva.

5. *Ketten (Ursula és Vilmos) fej-vagy-írást játszanak egy kiegyensúlyozott pénzérmével. Ha fej jön ki, Ursula nyer 1 forintot Vilmostól, ha írás, akkor fordítva. Mind Ursulának, mind Vilmosnak korlátlanul áll a rendelkezésére pénz. Bennünket Ursula nyereményének modulo n vett maradéka érdekel, ahol $n > 2$ egész (ℓ forint veszteség $-\ell$ forint nyereségként értelmezendő, tehát például 1 forint veszteség maradéka $n - 1$.) Milyen n-re konvergens Ursula modulo n vett nyereményének az eloszlása és konvergencia esetén mi a határeloszlás? (Kezdetben természetesen a nyeremény 0.)*

   A Markov-lánc állapotai $0, 1, \ldots, n-1$. A nemnegatív valószínűségű átmenetek $j \to j+1$, illetve $i \to j-1$ (modulo n). Mindkét esetben a valószínűség $1/2$. Az állapotátmenet-mátrix tehát $A = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P^T$, ahol P a $(0, 1, \ldots, n-1)$ ciklushoz tartozó permutációmátrix. A G_A gráf, a $(0, 1, \ldots, n-1, n)$ kör, oda-vissza irányított élekkel, nyilván erősen összefüggő. Tudjuk, hogy ha A imprimitív, akkor valamely $s > 1$ egészre G_A csúcsai s részre oszthatók úgy, hogy élek csak az i-edik rész és az $i+1$-edik rész között mennek (ciklikusan, modulo s). Mivel oda-vissza élek vannak, ez csak úgy lehet, ha $s = 2$, azaz G_A, irányítatlan gráfként nézve 2 színnel színezhető. Ez pontosan akkor fordul elő, ha n páros. Ekkor az eloszlás "alternál": páros sok lépés után A nyereménye mindig páros, páratlan sok lépés után pedig mindig páratlan, tehát nem lehet konvergens. Ha viszont n páratlan, az A mátrix primitív, és így az eloszlás konvergál a stacionáriushoz, ami M dupla sztochasztikussága miatt az egyenletes eloszlás.

6. *Jelölje J_n azt az $n \times n$-es valós mátrixot, amelynek minden eleme 1, I_n pedig az $n \times n$-es egységmátrixot. Mennyi a $J_n - I_n$ mátrix determinánsa? ($J_n - I_n$ főátlójában csupa 0 áll, azon kívül csupa 1.)*

   J_n szimmetrikus, így létezik létezik olyan U ortogonális mátrix, amelyre $U^{-1} J_n U$ diagonális, amelynek a főátlójában J_n sajátértékei állnak. J_n rangja 1, mert bármely lét oszlopa azonos. Így J_n magja $n-1$ dimenziós, és ugyanez igaz $U^{-1} J_n U$-ra is. Tehát $U^{-1} J_n U$ főátlójában $n-1$ 0 van. A maradék sajátérték például a következőképpen határozható meg: J_n pozitív elemű, így $\rho(J_n)$ is egy sajátérték. A legkisebb sorösszeg alsó, a legnagyobb pedig felső korlát $\rho(J_n)$-re, így $\rho(J_n) = n$. Tehát $U^{-1} J_n U$ főátlójában egy helyen n, a többi helyen 0 áll. Innen $U^{-1}(J_n - I_n)U = U^{-1} J_n U - I_n$ főátlójában főátlójában egy helyen $n-1$, a többi helyen -1 áll. Mivel hasonló mátrixok determinánsa ugyanaz, $\det(J_n - I_n) = \det U^{-1}(J_n - I_n)U = (-1)^{n-1}(n-1)$.