

## Alkalmazott algebra zárthelyi, 2011. október 27.

1. Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definiték?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Az alábbi mátrixok közül melyek irreducibilisek, melyek primitívek?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Adjuk meg azt  $x \in \mathbb{R}^2$  vektort, amelyre az  $Ax$  távolsága a  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$  vektortól a lehető legkisebb, ahol  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

4. Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es komplex elemű mátrix és  $B$  az  $\begin{pmatrix} & A \\ A & \end{pmatrix}$  alakú  $2n \times 2n$ -es mátrix, ahol az üresen hagyott helyeken csupa 0 áll. Mi az összefüggés  $A$  és  $B$  sajátértékei között? (Multiplicitások vizsgálata nem része a feladatnak.)

5. Ketten (Ursula és Vilmos) fej-vagy-írást játszanak egy kiegyensúlyozott pénzérmével. Ha fej jön ki, Ursula nyer 1 forintot Vilmostól, ha írás, akkor fordítva. Mind Ursulának, mind Vilmosnak korlátlanul áll a rendelkezésére pénz. Bennünket Ursula nyereményének modulo  $n$  vett maradéka érdekel, ahol  $n > 2$  egész ( $\ell$  forint veszteség  $-\ell$  forint nyereséggént értelmezendő, tehát például 1 forint veszteség maradéka  $n - 1$ .) Milyen  $n$ -re konvergens Ursula modulo  $n$  vett nyereményének az eloszlása és konvergencia esetén mi a határeloszlás? (Kezdetben természetesen a nyeremény 0.)

6. Jelölje  $J_n$  azt az  $n \times n$ -es valós mátrixot, amelynek minden eleme 1,  $I_n$  pedig az  $n \times n$ -es egységmátrixot. Mennyi a  $J_n - I_n$  mátrix determinánsa? ( $J_n - I_n$  főátlójában csupa 0 áll, azon kívül csupa 1.)