Alkalmazott algebra zárthelyi, 2010. október 29.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Az A_1, A_3, A_4, A_5 mátrixok szimmetrikusak, így normálisak. Az A_2 mátrix ferdén szimmetrikus, azaz $A_2^T = -A_2$, így A_2 is normális ($A_2^T A_2 = -A_2^2 = A_2 A_2^T$). Az A_2 mátrix nem szimmetrikus, így nem lehet pozitív definit sem. Az A_1 mátrix főátlójában van 0, ezért A_1 nem lehet pozitív definit (pl. $(1,0)A_1(1,0)^T = 0$). Az A_3 mátrix determinánsa 0, ezért nem lehet pozitív definit. Az A_4 mátrixnak főátlójában a második elem negatív, ezért $(0,1)A_4(0,1)^T < 0$, így szintén nem lehet pozitív definit. Ha az A_5 mátrixra alkalmazzuk a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást, az egységmátrixot kapjuk, így A_5 pozitív definit.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A B_2, B_3, B_4, B_5 mátrixok erősen összefüggő irányított gráfok adjacencia-mátrixai, ezért irreducibilisek. A B_1 mátrix olyan gráfhoz tartozik, ami nem erősen összefüggő, tehát B_1 reducibilis (és ezért nem is lehet primitív). $B_2^3 = I$, így B_2^{3k} sohasem pozitív, ezért B_2 imprimitív. A B_3 mátrix pozitív, így primitív is. B_4^2 reducibilis, így B_4^{2k} is mindig reducibilis, ezért B_4 imprimitív. B_5 irreducibilis és van a főátlójában nem 0 elem, ezért primitív. (Ez abból is látható, hogy B_5^2 pozitív.)

3. *Mekkora a következő mátrixok legnagyobb szinguláris értéke?*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $C_i^T C_i$ szorzat helyett érdemes a $C_i C_i^T$ szorzattal dolgozni, mert az utóbbi kisebb mátrix, ugyanakkor a pozitív sajátértékek ugyanazok. $C_1 C_1^T$ és $C_2 C_2^T$ is a 2×2-es egységmátrix, így azokra 1 a válasz. $C_3 C_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ennek a pozitív sajátértéke 2, így C_3-ra a válasz $\sqrt{2}$. $C_4 C_4^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ennek a nagyobbik sajátértéke 2, így a válasz ismét $\sqrt{2}$. $C_5 C_5^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, így a válasz 2.

4. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \textit{és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az Ax vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a b vektorhoz!

A oszlopai ortonormált rendszert alkotnak, azaz $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, a 2×2-es egységmátrix, így A szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása $A = A I_2 I_2$. Ezért A pszeudoinverze $A^+ = I_2^T I_2^{-1} A^T = A^T$. Az órán tanultak miatt egy optimális megoldás $x = A^+ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.6 \end{pmatrix}$.

5. *Tegyük fel, hogy A egy olyan $n \times n$-es valós mátrix, hogy létezik $\lim_{k\to\infty} A^k$ és $\lim_{k\to\infty} A^k = I_n$, az $n \times n$-es egységmátrix. Igazoljuk, hogy ekkor $A = I_n$.*

$A = A I_n = A \lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = I_n$.

6. *Legyen A egy nemnegatív valós elemű szimmetrikus mátrix. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor primitív, ha A^2 irreducibilis!*

Ha A primitív, akkor semelyik hatványa nem lehet reducibilis, így A^2 sem. Fordítva, ha A^2 irreducibilis, akkor A is az. Ebből az is következik, hogy A egyik sora sem csupa 0, így $A^2 = A^T A$ főátlójában pozitív számok állnak, ebből és A^2 irreducibilitásából következik, hogy A^2 primitív, azaz $A^{2k} > 0$ valamely k-ra. De ekkor A is primitív.