Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2010. november 8.

1. *Hány megoldása van a kételemű test felett az*

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1 \quad x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \quad x_2 + x_4 = 1 \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \quad x_3 + x_5 = 1$$

egyenletrendszernek?

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}, \text{ amiből } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

lesz a Gauss-eliminációs eljárás háromszögesítő lépéseit végrehajtva. Itt az utolsó sor a $0 = 1$ ellentmondásnak felel meg, tehát nincs megoldás.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normálisak mely(ek) pozitív definit(ek)?*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

A_1 ferdén szimmetrikus, így normális, de nem szimmetrikus, így nem lehet definit sem. $A_4^T A_4$ és $A_4 A_4^T$ bal felső sarkában levő elemeit összevetve látjuk, hogy A_4 nem normális, így szintén nem lehet definit. A_2 és A_3 szimmetrikus, így mindkettő normális. A_2 utolsó két sora azonos, így szinguláris (nem invertálható), ezért nem lehet definit. Ha A_3-ra Gram-Schmidt–ortogonalizációt alkalmazunk, az egységmátrixot kapjuk, így A_3 pozitív definit.

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Moore-Penrose–féle pszeudoinverzét!*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B_1 szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása $B_1 = (1)\,(\sqrt{3})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, ezért pszeudoinverze $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$.

B_2 szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ezért pszeudoinverze $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

4. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az Ax vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a b vektorhoz!

$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, ennek két sajátértéke van: 0 és 12, a 12 sajátértékhez tartozó 1 hosszú sajátvektor (± 1-gyel való szorzás erejéig) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Erre A-t alkalmazva az $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T = (\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}})^T$ vektort kapjuk, ami 1 hosszúra normálva $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$. Ezért A szinguláris értékek szerinti felbontása $A = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T \sqrt{12} (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ és így A pszeudoinverze $A^+ = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T \frac{1}{\sqrt{12}} (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{2}{12} \end{pmatrix}$, és egy optimális megoldás megkapható a következőképpen: $x = A^+(1,2,3)^T = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})^T$.

5. *Határozzuk meg azokat 2×2-es nemnegatív elemű A mátrixokat, amelyekre A spektrálsugara 1 és az A^k sorozat nem konvergens!*

Az előadáson tanult konvergenciatétel miatt A nem lehet primitív. Ha A irreducibilis, akkor nem lehet a főátlójában pozitív elem (különben primitív lenne), így $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ alakú. Ha α és β legalább egyike 0, akkor $A^k = 0$ $k > 1$ esetén. Tehát $\alpha > 0, \beta > 0$. A karakterisztikus polinomja $x^2 - \alpha\beta$, a két sajátérték tehát $\pm\sqrt{\alpha\beta}$. A spektrálsugár akkor 1, ha $\alpha\beta = 1$. Ekkor $A^k = I_2$ vagy A, aszerint, hogy k páros vagy páratlan, így a sorozat tényleg nem konvergens.

Ha A reducibilis, akkor $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ vagy $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$ alakú. A karakterisztikus polinomja mindkét esetben $(x - \alpha)(x - \beta)$, tehát A sajátértékei α és β. Ha $\alpha \neq \beta$, akkor egyik 1 (a spektrálsugár), a másik kisebb, továbbá a két sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, így a sajátvektorokból álló bázisra való áttérés mutatja, hogy A hasonló egy $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ alakú mátrixhoz, ami konvergál a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vagy a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixhoz, aszerint, hogy α és β közül melyik 1. Az $\alpha = \beta = 1$ esetben k szerint indukcióval látható, hogy $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (első eset) vagy $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\gamma & 1 \end{pmatrix}$ (második eset). Mindkét esetben akkor és csak akkor konvergens a sorozat, ha $\gamma = 0$.

Összefoglalva a válasz: vagy $A = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahol $\gamma > 0$, vagy $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, ahol $\gamma > 0$, vagy $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, ahol $\alpha > 0$.