Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2009. november 6.

1. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normális(ak), melyek pozitív definit(ek)?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a következő mátrixok szinguláris értékeit:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy A invertálható és A^{-1} is nemnegatív elemű. Igazuljuk, hogy ekkor A minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív elem áll.
4. Legyen A egy valós elemű négyzetes mátrix, λ pedig egy komplex sajátértéke A-nak. Igazoljuk, hogy ekkor $\overline{\lambda}$ (azaz λ komplex konjugáltja) is sajátértéke A-nak.
5. Legyen G egy $n > 1$ pontú egyszerű, hurokél-mentes, összefüggő irányítatlan gráf. Milyen összefüggés állítható G adjacencia-mátrixának primitivitása és G kromatikus száma között? (G adjacencia-mátrixa az az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, amelyre $a_{ij} = a_{ji} = 1$, ha i és j éllel össze van kötve, különben $a_{ij} = a_{ji} = 0$. G kromatikus száma pedig az a legkisebb k természetes szám, amelyre G csúcsai színezhetők k színnel úgy, hogy ne legyen két éllel összekötött azonos színű pont.)