Alkalmazott algebra - Nemnegatív mátrixok

Ivanyos Gábor

2011 ősz

Markov-láncok

- **Pontosabban:** véges állapotú, **homogén** (AKA stacionárius átmenet-valószínűségű) **Markov-láncok**
- **Állapotok:** $\{1, \ldots, n\}$
- Állapot-értékű val. változók: $X_0, X_1, X_2, \ldots,$,
- **Átmenet-valószínűségek:** a_{ij} : az $j \to i$ átmenet valsz:

$$\Pr(X_{k+1} = i | X_k = j) = a_{ij}$$

- X_k **eloszlása:** $\sim v^k = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix}$ **sztochasztikus** vektor:

  $\gamma_j^k \geq 0, \; \sum_{j=1}^n \gamma_j^k = 1$

Markov-láncok

- **Kezdeti eloszlás:** v^0.
- $v^{k+1} = Av^k$
- $A = (a_{ij})$ átmenet-mátrix **(oszlop-)sztochasztikus** (sztochasztikus vektort sztochasztikusba képez):
  - $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $v^k = A^k v^0$
- **kérdés:** v^k aszimptotikus viselkedése

  v^k konvergál-e és hova?

  ha konvergál, milyen gyorsan?

Szörfölő:

- állapotok: weblapok
- átment-valószínűség: $a_{ij} = \frac{\#j\to i \text{ linkek}}{\#j\to ? \text{ linkek}}$
- feltesszük, hogy minden j-re van $j \to ?$ link

  (pl. szükség esetén beiktatható saját magára mutató virtuális link)
- Korábban említett problémák:
  - több erős komponens: **reducibilitás**
  - "körbemutató linkek": **periodicitás/imprimitivitás**
- **Majd látjuk:** Több fontos sajátosság megfogható a link-gráffal (egyszeres irányított élek, lehetnek hurkok)
- **Markov-láncra,** (v. tetsz. mátrixra) a gráf
  - $j \to i$, ha $a_{ij} > 0$ és
  - a türelmetlen szörfölőre ez a teljes gráf

A spektrálsugár

- A $n \times n$-es **komplex vagy valós** mátrix
- A **spektrálsugara:**

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajárértéke } A\text{-nak}\}.$$

- **Tudjuk:** ha $\exists \lim_{k\to\infty} A^k v^0 = v$, akkor $Av = v$
  Ha ez a $v \neq 0$, akkor v sajátvektora A-nak 1 sajátértékkel
- **Tétel:**
  (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  (2) Ha $\rho(A) > 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = \infty$.
  Biz.: Schur-felb.: $A = U^* B U$: U unitér, B felső háromszög.
  (2).: $\|A^k\|^2 = \operatorname{tr} A^{k*} A^k = \operatorname{tr} U B^{k*} U^* U B^k U^* =$
  $\operatorname{tr} U B^{k*} B^k U^* = \operatorname{tr} B^{k*} B^k U^* U = \operatorname{tr} B^{k*} B^k = \|B^k\|^2$, elég tehát B-re belátni. Tfh. $B = (b_{ij})$-ben $|b_{ii}| > 1$. Ekkor B^k-nak az i-edik átlós eleme b_{ii}^k és $\|B^k\| \geq |b_{ii}|^k \to \infty$.
  (1).:-hez a köv. lemma.

A spektrálsugár II.

- **Lemma:** $C = (c_{ij})$, $C' = (c'_{ij})$ komplex $n \times n$-es mátrixok, $D = (d_{ij})$, $D' = (d'_{ij})$ nemnegatív elemű valós mátrixok, hogy $|c_{ij}| \leq d_{ij}$, $|c'_{ij}| \leq d'_{ij}$. Ekkor $|c''_{ij}| \leq d''_{ij}$, ahol $CC' = (c''_{ij})$, $DD' = (d''_{ij})$.

  Biz.:

  $|c''_{ij}| = |\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}c'_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}||c'_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} d_{ik}d'_{kj} = d''_{ij}$

- **Tétel:** (1)Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  Biz.: Schur-felb.: $A = U^*BU$: U unitér, B felső háromszög. Mivel $A^k = U^*B^kU$, elég B-re.
  Legyen $D = (d_{ij})$ egy olyan nemneg. elemű $|b_{ij}| \leq d_{ij}$, továbbá D mindegyik átlós eleme < 1, de ezek páronként kül.

  Ha $B^k = (b^k_{ij})$ és $D^k = (d^k_{ij})$, akkor a lemma miatt $|b^k_{ij}| \leq d^k_{ij}$, így elég $\lim D^k = 0$.

A spektrálsugár III.

- **Tétel:** (1) Ha $\rho(A) < 1$, akkor $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.
  Biz. (folyt):
  Eddigiek miatt elég arra az esetre, ha A-nak n kül. sajátértéke van. (Előbbi D ilyen lett.)
  Spektráltétel spec. esete: $\exists\ C$, hogy

$$A = C^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)C.$$

$$A^k = C^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)C \longrightarrow C^{-1}\mathrm{diag}(0, \ldots, 0)C = 0.$$

- **Megj.:** belátható, hogy $\left\|A^k\right\| = O(\rho(A)^k)$,
  tehát $\rho(A) < 1$ esetén a konvergencia exponenciális
  $O()$-ban a konstans függ A-tól

A spektrálsugár IV.

- **Egy egyszerű konvergencia-tétel:** Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(x-\mu_i)$, ahol $|\mu_i| < |\lambda|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Ekkor létezik $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\lambda}A)^k$, és az egy (nem felt. ortog.) vetítés A-nak a λ-hoz tartozó sajátalterére.

  Biz.: Legyen v egy sajátvektora A-nak λ sajátértékkel és legyen C egy olyan invertálható, aminek első oszlopa v, a többi pedig $(\lambda I - A)\mathbb{C}^n$ egy bázisát alkotja. Ekkor $C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, ahol $\rho(A') < 1$. Ezért $\lim A'^k = 0$ és emiatt létezik $\lim(C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vetítés az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ által gen. altérre.

  Így létezik $\lim(\frac{1}{\lambda}A)^k = C\lim(C^{-1}\frac{1}{\lambda}AC)^k C^{-1}$, és az egy vetítés a $\langle v\rangle$ sajátaltérre.
- **Megj.:** A határérték-vetítés magtere $\lambda I - A$ képtere
- **Megj.:** A konvergencia $\frac{\rho_2(A)}{\rho(A)}$-ban exponenciális ($\rho_2(A)$ a második legnagyobb sajátérték-absz. érték)

A spektrálsugár V.

Egyszerű konvergencia-tétel - változat: Tfh. A karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(x-\mu_i)$, ahol $|\mu_i|<|\lambda|$ $(i=1,\dots,n-1)$. Legyen $v^0 \notin (A-\lambda I)\mathbb{C}^n$ és $v^k = A^k v^0$. Ekkor a $\langle v^k\rangle$ 1-dim altér "konvergens" és a "határérték" a λ-hoz tartozó sajátaltér.

Biz.: Legyen $w^k = \frac{1}{\lambda^k}v^k$. Ekkor (mivel $v^0 \notin (A-\lambda I)\mathbb{C}^n \supseteq \ker A^k$) $\langle w^k\rangle = \langle v^k\rangle$ és $\lim w^k = (\lim(\frac{1}{\lambda}A)^k)v^0$ egy sajátvektor a λ-sajátaltérből. ($\neq 0$, mert v^0 nem esik a vetítés magjába, ami $A-\lambda I$ képtere.)

a $\langle v^k\rangle$ **"irány" konvergenciája** helyett szokás:

- v^k koordinátáinak 1 összegűre normálása
  (bizonyos feltételek mellett, pl. minden koord. ≥ 0)
- v^k egységvektorra normálása: v^k helyett $\frac{1}{|v_k|}v^k$

  ekkor a v^k sorozatnak egy *részsorozata* konvergens

  de nagy k-ra v^k *közel van* egy sajátvektorhoz

Nemnegatív mátrixok - jelölések

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \; v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; A = (a_{ij}), \; A' = (a'_{ij}) \; n \times n\text{-es valós}$$

mátrixok.

- $v \geq 0$, ha $\gamma_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $v > 0$, ha $\gamma_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $A \geq 0$, ha $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $A > 0$, ha $a_{ij} > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $v \geq v'$ (illetve $v > v'$), ha $v - v' \geq 0$ $(v - v' > 0)$
- $A \geq A'$ (illetve $A > A'$), ha $A - A' \geq 0$ $(A - A' > 0)$
- **Megj.:** $0 \neq v \geq 0$-ból nem következik $v > 0$.

Nemnegatív mátrixok - elemi észrevételek

- $A \geq 0 \Leftrightarrow Av \geq 0$ minden $v \geq 0$ vektorra.
- $A > 0 \Leftrightarrow Av > 0$ minden $0 \neq v \geq 0$ vektorra.
- $A \geq A'$, $v \geq v' \Rightarrow Av \geq A'v'$.
- $A \geq A'$, $B \geq B' \Rightarrow A + B \geq A' + B'$.
- $A \geq A'$, $B \geq B' \Rightarrow AB \geq A'B'$.

  láttuk erősebb formában komplex mátrixokra

Nemnegatív mátrixok spektrálsugara ("max-min")

Ideiglenes def.: $A = (a_{ij}) \geq 0,\ v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$-ra:

- $\rho'_v(A) := \max\{r \in \mathbb{R} \mid Av \geq rv\} = \min_i \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j$

  (konvenció: 0 nevezőjű tört:$= \infty$).

  A mennyire tudja v-t az összes koordináta irányában megnyújtani.
- $\rho'(A) := \sup\{\rho'_v(A) \mid 0 \neq v \geq 0\}$
- **Áll.:** $\rho'(A) = \sup\{\rho'_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\} = \max\{\rho'_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\}$.

  Biz.: első $=$-ség: $\rho'_v(A)$ nem vált a $v \leftarrow \frac{1}{|v|}v$ cserével

  második $=$-ség: a $\{v \mid v \geq 0, |v| = 1\}$ halmaz korlátos és zárt, továbbá $v \mapsto \rho'_v(A)$ folytonos v-ben ezen a halmazon.

Egyenértékűség - előkészületek

- **Áll.:** $0 \le A \le A'$ esetén $\rho'(A) \le \rho'(A')$.

  Biz.: Minden $v \ge 0$-ra $\rho'_v(A) \le \rho'_v(A')$.

- **Lemma:** $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij})$ nemnegatív valós, hogy $|b_{ij}| \le a_{ij}$ esetén: $\rho(B) \le \rho'(A)$. Speciálisan $\rho(A) \le \rho'(A)$.

  Biz.: Tfh. $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ sajátvektora B-nek λ sajátértékkel. A $Bv = \lambda v$-ben az i-edik koordinátát felírva: $\lambda\gamma_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j$, innen
  $|\lambda||\gamma_i| = |\sum_{j=1}^n b_{ij}\gamma_j| \le \sum_{j=1}^n |b_{ij}||\gamma_j| \le \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j|$, így
  $|\lambda| \le \min_i \frac{1}{|\gamma_i|} \sum_{j=1}^n a_{ij}|\gamma_j| = \rho'_w(A) \le \rho'(A)$, ahol $w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ |\gamma_2| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix}$.

Spektrálsugár: egyenértékűség a pozitív esetre

- **Áll.:** Tfh. $A > 0$ és $0 \neq v \geq 0$, hogy $Av \geq \rho'(A)v$ (azaz $\rho'_v(A) = \rho'(A)$). Ekkor $Av = \rho'(A)v$.
  Biz.: $\rho := \rho'(A)$ jelöléssel tfh. $Av \neq \rho v$. $0 \neq w := Av - \rho v \geq 0$, így ($A > 0$ miatt) $Aw > 0$. A-val szorozva:
  $0 < Aw = A(Av) - \rho \cdot (Av)$, innen $A(Av) > \rho \cdot (Av)$. Ekkor $\rho'_{Av}(A) > \rho$, ellentmondás.
- Köv.: Ha $A > 0$, akkor van olyan $0 \neq v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.
  Biz.: Tudjuk, hogy $\rho'(A) = \rho'_v(A)$ valamely $0 \neq v \geq 0$ vektorra. Az előző állítás alkalmazható.

Spektrálsugár: egyenértékűség

Áll.: Ha $A \geq 0$, akkor van olyan $v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.

Biz.: Legyen $k \geq 1$-re $A_k := A + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

$A_k > 0$, tetsz. $0 \neq v \geq 0$-ra $\rho'_v(A) \leq \rho'_v(A_k) \leq \rho'_v(A_1)$. Így $\rho'(A) \leq \rho'(A_k) \leq \rho'(A_1)$.
Legyen $v_k \geq 0$ olyan (előző áll), hogy $|v_k| = 1$ és $A_k v_k = \rho'(A_k)v_k$.
A $(v_k, \rho'(A_k))$ sorozat tagjai $\mathbb{R}^{n+1}$ egy korlátos részhalmazából vannak, így (Bolzano-Weirstrass) van konvergens részsorozat: $k_1 < k_2 < \ldots < k_\ell < \ldots$, hogy létezik $\lim_{\ell\to\infty} v_{k_\ell} = v$ és $\lim_{\ell\to\infty} \rho'(A_{k_\ell}) = \rho'$.

Tudjuk: $0 \leq v$ és $|v| = 1$, továbbá $\rho'(A) \leq \lim \rho'(A_{k_\ell}) = \rho'$, és

$Av = \lim A_{k_\ell} v_{k_\ell} = \lim \rho'(A_{k_\ell})v_{k_\ell} = \rho' v$. Utóbbi miatt $\rho' = |\rho'| \leq \rho(A) \leq \rho'(A)$ is

igaz, így $\rho' = \rho'(A)$.

Spektrálsugár: "max-min" egy interpretációja (pótlap)

Gazdaság egy modellje: (Leontyev)

- egységnyi i termék előállításhoz a_{ij} mennyiségű j termék kell
- **készlet:** $v = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$: j-ból γ_j-nyi van
- ezt felhasználva i-ből $\sum_j a_{ij}\gamma_j$-nyi lesz:
- **új készlet:** Av
- $\rho'_v(A)$: a legrosszabb i-ből a készlet bővülése (v. zsugorodása)
- $\rho'(A)$: $\rho'_v(A)$ **optimuma**
- $\rho'(A) = \rho(A)$ interpretációja: optimális esetben minden termékből ugyanaz ($\rho(A)$) a bővülés aránya

a gazdaság minden szektorában ugyanakkora a növekedés

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra

Áll.: $A \geq 0$-ra

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Biz. (Felső korlát): Tfh. $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$-ra $\rho_v'(A) = \rho(A)$.

i_0: az az index, amelyre a $\gamma_{i_0} \geq \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ekkor

$$\rho(A) = \rho_v'(A) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \frac{\gamma_j}{\gamma_{i_0}} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Alsó és felső korlát a spektrálsugárra

Áll.: $A \geq 0$-ra

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Biz. (alsó korlát): $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$-re

$$\rho'_v(A) = \min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} = \min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

ugyanakkor $\rho(A) = \rho'(A) \geq \rho'_v(A)$.

További egyenlőtlenségek

$A \geq 0$

- **Köv.:** $\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

  Biz.: $\rho(A^T) = \rho(A)$ (ugyanaz a karakterisztikus polinom).
- **Köv.:** Ha A sor- vagy oszlop-sztochasztikus, akkor $\rho(A) = 1$.
- **Köv.:** Tetsz. $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_n > 0$-ra:

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i}.$$

  Biz.: Legyen $D = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ és $A' = D^{-1}AD = (a'_{ij})$. Ekkor $a'_{ij} = a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}$, továbbá, mivel A és A' hasonlóak, $\rho(A) = \rho(A')$. Alkalmazzuk a sorösszeg-becsléseket az A' mátrixra.
- **Köv.:** $\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} \leq \rho(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\gamma_i}{\gamma_j}$.

Pozitív mátrixok - Perron elmélete

$A > 0$

- **Áll.:** $\rho(A) > 0$

  Biz.: $\rho(A) \geq$ a legkisebb sorösszeg

- **Áll:** A-nak van pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

  Biz.: Tudjuk már, hogy van nemneg. sajátvektor: $0 \neq v \geq 0$: $Av = \rho(A)v$.

  $A > 0$ miatt $Av > 0$, így $v = \frac{1}{\rho(A)} Av > 0$.

- **Áll.:** A-nak a $\rho(A)$ sajátértékhez tartozó pozitív sajátvektora skalárszoros erejéig egyértelmű.

  Biz.: Tfh. $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} > 0$ és $v' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} > 0$ két sajátvektor: $Av = \rho(A)v$ és

  $Av' = \rho(A)v'$. Legyen $\mu = \min_i \frac{\gamma_i'}{\gamma_i}$ és $w = (v' - \mu v) \geq 0$.

  $w = \frac{1}{\rho(A)} Aw$, így $A > 0$ miatt $w > 0$, ha $w \neq 0$. De w i-edik koordinátája 0,

  így csak $w = 0$ lehet, azaz $v' = \mu v$.

Perron II

$A > 0$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A-nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz.: Legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Bármely $i = 1, \ldots, n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

így $w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix}$ jelöléssel $0 \neq w \geq 0$ és $\rho(A)w \leq Aw$. Tudjuk, hogy $\rho(A) = \rho'(A)$ és volt korábban,hogy $Aw \geq \rho'(A)w$ esetén $Aw = \rho'(A)w$, azaz w egy nemneg. sajátvektor $\rho'(A)$ sajátértékkel. Így persze $w > 0$ is igaz és a fent az $\leq$ helyett $=$ teljesül:

Perron III

$A > 0$

Áll.: Ha λ komplex sajátértéke A-nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és v egy (komplex) sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.

Biz. (folyt):

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j \right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j| \quad (i = 1, \dots, n)$$

Ez csak úgy lehet, ha az összes γ_j egy irányba mutat: a $c = \gamma_i/|\gamma_i|$ 1 absz. értékű komplex szám i-től ftlen és $v = cw$.

Perron IV.

Segédáll.: Tfh. B egy $n \times n$-es $n-1$ rangú valós mátrix. Legyen $v \in \ker B$, $u \in \ker B^T$. Ha $v^T u \neq 0$, akkor B-nek a $B\mathbb{R}^n$ képtérre vett megszorítása nemelfajuló.

Biz.: rang$= n-1$ miatt $\ker B = \langle v \rangle$, így elég $v \notin B\mathbb{R}^n$-t igazolni. Tfh, indirekte, hogy $v = Bw$. Ekkor $v^T u = (Bw)^T u = w^T B^T u = 0$, ellentmondás.

Áll.: $A > 0$ esetén A karakterisztikus polinomjának $\rho(A)$ egyszeres gyöke.

Biz.: Legyenek $v, u > 0 : Av = \rho(A)v$ és $A^T u = \rho(A^T)u = \rho(A)u$. Ekkor $v^T u > 0$ és $B = A - \rho(A)I$-val segédáll miatt $B\mathbb{R}^n$ egy bázisát v-vel kiegészítve bázist kapunk. ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $\rho = \rho(A)$ és A' a $B + \rho I$-nek a $B\mathbb{R}^n$-re való megszorításának a mátrixa, ennek pedig nem sajátértéke ρ. A kar. polinomja $= (x - \rho)g(x)$, ahol $g(x)$ A' kar. pol.

Perron V

- **Köv.:** $A > 0$-ra $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\rho(A)}A)^k$ létezik és az egy projekció a $\rho(A)$-hoz tartozó 1-dim. sajátaltérre.
- **Pontosabban.:** Legyen $A > 0$ és legyenek $v > 0$, $u > 0$, amelyekre $Av = \rho(A)v$, $A^T u = \rho(A)u$ és $u^T v = 1$. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\rho(A)}A)^k = vu^T$$

Biz.: ld. a következőt.

Perron VI

Segédáll.: Legyen $u, v \in \mathbb{R}^n$, hogy $u^T v = 1$. Ekkor vu^T az egyetlen olyan P projekció-mátrix, amelyre P képtere $\langle v \rangle$ és P^T képtere $\langle u \rangle$.

Megj: $u = v$-re a $\langle v \rangle$-ra való merőleges vetítés

Biz.: vu^T rangja 1, $(vu^T)v = v(u^T v) = v1 = v$, és
$(vu^T)(vu^T) = v(u^T v)u^T = v1u^T = vu^T$, így vu^T tényleg egy $\langle v \rangle$ képterű projekció.
Ugyanígy, $(vu^T) = uv^T$ egy $\langle u \rangle$ képterű projekció.

Egyértelműség: Tfh. P telj. a feltételeket. Ekkor $P(vu^T) = (Pv)u^T = vu^T$ és

$(vu^T)P = v(u^T P) = v(Pu)^T = vu^T$. Innen

$(P - vu^T)^2 = P - Pvu^T - vu^T P + vu^T = P - vu^2$. Mivel $(P - vu^T)$ képtere $\subseteq \langle v \rangle$,

$P - vu^T$ vagy 0 vagy egy projekció $\langle v \rangle$-re. Utóbbi $(P - vu^T)v = 0$ miatt nem lehet.

Perron és a türelmetlen szörfölő

- **Köv.:** Legyen $A > 0$ és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = \rho(A)v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen
$$w^{k+1} = Aw^k \text{ sztochasztikusra normálva}$$
(leosztva a koordináták összegével). Ekkor
$$\lim_{k\to\infty} w^k = v.$$
- Tudjuk: sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1.
- **Köv.:** Legyen $A > 0$ sztoch. és legyen v az a sztochasztikus vektor amelyre $Av = v$. Legyen w^0 tetsz. sztochasztikus vektor és legyen
$$w^k = A^k w^0. \quad \text{Ekkor} \quad \lim_{k\to\infty} w^k = v.$$

Irreducibilis mátrixok - Frobenius elmélete

$A \geq 0$ $n \times n$-es

- **Def.:** A **reducibilis,** ha $\exists\ \emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$ (valódi részhalmaz), hogy $a_{ij} = 0$ $j \in J$, $i \notin J$ esetén.
- **Átfogalmazás:** A reducibilis, ha $\exists$ P permutációmátrix., hogy $P^{-1}AP$ valódi blokk felső háromszög: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} \end{pmatrix}$
  (A_{11} $\ell \times \ell$-es , A_{22} $(n-\ell) \times (n-\ell)$-es, A_{12} $\ell \times (n-\ell)$-es.)
- **Gráfos átfogalmazás.** Legyen G_A az az irányított (esetleg hurokéles) gráf $\{1, \ldots, n\}$-en, amelyben $j \to i$ akkor él, ha $a_{ij} > 0$.
- A reduciblis, ha a G_A csúcsai valódi módon feloszthatók két részre úgy, hogy az első részből a másodikba nem megy él (a második részből az elsőbe még mehet.)
- **Def.:** A **irreducibilis**, ha nem reducibilis, azaz ha G_A erősen összefüggő

Példák reducibilis/irreducibilis mátrixokra

- Reducibilisek: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Irreducibilisek: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **Megjegyzés:** Itt csak G_A számít, mindegy, hogy A pozitív elemeiben mi áll konkrétan.

Reducibilis/irreducibilis mátrixok: feladatok

- Mutassuk meg, hogy ha $A \geq 0$ irreducibilis, akkor A^T is irreducibilis.
- Ha egy $A \geq 0$ szimmetrikus mátrix reduciblis, akkor valamely P permutációs mátrixra $P^{-1}AP$ blokk-diagonális alakú.
- Minimum hány nulla eleme van egy $n \times n$-es reducibilis mátrixnak?
- Maximum hány nulla eleme van egy $n \times n$-es irreducibilis mátrixnak?

Irreducibilitás jellemzése

Áll: Legyen $A \geq 0$ $n \times n$-es. Ekkor A irreducibilis $\Leftrightarrow (A+I)^n > 0$.

Biz. $\Leftarrow$:
$$\begin{pmatrix} A_{11}+I & * \\ 0 & A_{22}+I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (A_{11}+I)^n & * \\ 0 & (A_{22}+I)^n \end{pmatrix} \not> 0.$$

$\Rightarrow$: Legyen A irred. és $0 \neq v \geq 0$.
Legyen J azon koordináták halmaza, amelyekben v pozitív.
$(A+I)v = v + Av$ pozitív J-ben,
és még, ha $|J| < n$, akkor (mivel A irred.), i-ben is,
ahol $i \notin J, j \in J$, hogy $a_{ij} > 0$ (A irred.).
Ekkor $(A+I)v$ több helyen pozitív, mint v.
Indukcióval: ha $0 \neq v \geq 0$, akkor $(A+I)^k v$ legalább $\min(k+1, n)$ helyen pozitív.

Tehát $(A+I)^n v > 0$ (sőt, $(A+I)^{n-1} > 0$) bármely $v \geq 0$-ra.

Irreducibilitás jellemzése gráffal

- Észrevétel: $A, B \geq 0$ $n \times n$-es mátrixokra G_{AB} -ben $j \to i$ él, ha van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$ amelyre $k \to i$ él G_A-ban és $j \to k$ pár él G_B-ben.
- **Köv.:** $j \to i$ él G_{A^ℓ}-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő ℓ hosszú irányított séta.

  Biz.: $\ell = 1$-re G_A definíciója, $\ell > 1$-re indukciós lépés: észrevétel A-val és $B = A^{\ell-1}$-gyel.
- **Köv.:** $j \to i$ él $G_{(A+I)^\ell}$-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő $\leq \ell$ hosszú irányított út.
- **Köv.:** $\ell \geq n-1$ esetén $j \to i$ él $G_{(A+I)^\ell}$-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő irányított út.

Irreducibilis mátrixok spektrálsugara - Frobenius

- **Áll.:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis akkor $\rho(A) > 0$.

  Biz. A-ban nincs csupa 0 sor; a min. sorösszeg alsó korlát $\leq \rho(A)$.
- **Észrevétel:** Ha v sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $(\lambda+1)^n$ sajátértékkel.
- **Speciálisan:** ha v sajátvektora A-nak $\rho(A)$ sajátértékkel (tudjuk, hogy $A \geq 0$ esetén van ilyen $v \geq 0$), akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $\rho((A+I)^n) = (\rho(A)+1)^n$ sajátértékkel.

  Ha A irreducibilis, akkor tehát alkalmazható $(A+I)^n$-re a Perron-elmélet:
- **Tétel (Frobenius):** Tfh. $A \geq 0$ $n \times n$-es irred. Ekkor
  - $\rho(A)$ sajátértéke A-nak;
  - $\rho(A)$ egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának;
  - létezik A-nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

Példa: ciklus

- Legyen A az $(12\dots n)$ ciklus permutációmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

- A irreducibilis,
- $\rho(A) = 1$,
- A összes sajátértéke 1 absz. értékű,
- $A^k v$ csak kivételes v-re konvergens.

Primitív mátrixok

- **Def.:** Legyen $A \geq 0$ irred. A primitív, ha $\rho(A)$ az egyetlen $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke
- Primitív mátrixra telj. az egyszerű konvergenciatétel feltételei:
- **Tétel:** Tegyük fel, hogy az $A \geq 0$ irreducibilis mátrix primitív. Ekkor

  $$\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k \longrightarrow vu^T,$$

  ahol v A-nak, u pedig A^T-nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel, amelyekre $u^Tv = 1$.

  Változat: $w^0 \geq 0$, $w^{k+1} = Aw^k$, lenormálva (1 hosszúra vagy sztochasztikusra) konvergál előbbi v lenormáltjához
- **Példa:** Ha $A \geq 0$ irreducibilis, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor A primitív.

Alkalmazás: gyűjtőlapok és tekintélyek

- Kleinberg 1998
- **Modell:** kétféle lap:
  - értékes infot tartalmazó
  - linkgyűjtemény
- **Róka fogta csuka:**
  - tekintélyes lapra sok jó gyűjtemény mutat
  - jó gyűjtemény sok tekintélyes lapra mutat
- **Számszerűen:**

  lapok gyűjtő-értéke γ_i, tekintély-értéke τ_i
  - $\tau_i = c \cdot \sum_{j \to i} \gamma_j \quad (i = 1, \ldots, n)$
  - $\gamma_j = c' \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i \quad (j = 1, \ldots, n)$

  c és c' normáló tényezők
  hogy pl. $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^2 = 1$ és $\sum_{i=1}^{n} \tau_i^2 = 1$ teljesüljön.

Gyűjtőlapok és tekintélyek II.

- **Róka fogta csuka feloldása**

  k-adik időpontban a lapok gyűjtő-értéke γ_i^k, tekintély-értéke τ_i^k
  - $\tau_i^{k+1} = c' \cdot \sum_{j \to i} \gamma_j^k$
  - $\gamma_j^k = c \cdot \sum_{i \leftarrow j} \tau_i^k$
- **Mátrixosan-vektorosan**
  - $A = (a_{ij})$ adjacencia-mátrix: $a_{ij} = 1$, ha j mutat i-re, különben 0.
  - $\underline{g}^k = (\gamma_1^j, \ldots, \gamma_n^k)^T$, $\underline{t}^k = (\tau_1^k, \ldots, \tau_m^k)^T$
  - kezdetben $\underline{g}^0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})^T$
  - $\underline{t}^k = c_k \cdot A\underline{g}^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$
  - $\underline{g}^{k+1} = c_k' \cdot A^T \underline{t}^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$

  - "jó" esetben: $\underline{g} = \lim_{k \to \infty} \underline{g}^k$, $\underline{t} = \lim_{k \to \infty} \underline{t}^k$
  - $\underline{t} = A\underline{g}$, lenormálva

Gyűjtőlapok és tekintélyek III.

- Két sorozatú rekurzióból egy
  - $\underline{t}^k = c_k \cdot A\underline{g}^k$
  - $\underline{g}^{k+1} = c'_k \cdot A^T \underline{t}^k$
    helyett
  - $\underline{g}^{k+1} = c''_k \cdot A^T A\underline{g}^k \qquad k = 0, 1, 2 \dots$
- **Észrevétel:** $A^T A \geq 0$ poz. szemidef.: primitív, ha irred.
- **Reducibilitás:** Akkor, ha van a lapoknak egy G valódi és egy T része, hogy
  - G beli lap csak T belire mutat
  - G-n kívüli lap csak T-n kívülire mutat

Gyűjtőlapok és tekintélyek IV.

- **Konvergenciatétel alk.:** Irred. esetben $\underline{g}^k$ konvergál a $\rho(A^T A)$-hoz tartozó pozitív 1 hosszú sajátvektorhoz.
- gyűjtő-értékek $\underline{g}$, tekintély-értékek $A\underline{g}$ alapján.
- Gyakorlatban: nem az egész WWW-re, hanem csak egy viszonylag kicsi, az adott témakörben releváns részére
- **Megj.:** Reducibilis esetben:
  - feltehető: $A^T A$ blokk diagonális
    (alk. P-re $P^{-1} A^T A P$ blokk diag.)
  - a blokkok $\sim$ $G_{A^T A}$ összefüggő komponensei
  - a blokkok irreducibilisek
  - konvergencia blokkonként: $(D^{-1}A)^k = D^{-k} A^k$ konvergens,
    D A-val felcs. diag. mátrix: blokkonként a max. sajátérték
  - $\underline{g}^k$ ekkor is konvergál (valamelyik nemneg. $\rho(A)$-sajátvektorhoz)

Primitív mátrixok egyszerű jellemzései

- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow$ $A^k > 0$ valamely k-ra.
  Biz.: $\Rightarrow$: $(\frac{1}{\rho(a)}A)^k \to vu^T > 0$, így $A^k > 0$, ha k elég nagy.
  $\Leftarrow$: Ha $A^k > 0$, akkor (Perron) A^k-nak $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ az egyetlen $\rho(A)^k$ absz. értékű sajátértéke, és az egyszeres gyöke A^k kar. pol.-jának de akkor A-nak is csak egyetlen $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van.
- **Megj.:** $A \geq 0$ esetén ha $A^k > 0$, akkor $A^\ell > 0$ $\ell > k$-ra is.
- **Áll.:** Ha $B \geq 0$ irred. és van B-nek pozitív diag. eleme, akkor $B^k > 0$ valamely $1 \leq k \leq 2(n-1)$-re.
  Biz.: Tfh. ℓ-edik diag. elem > 0. Ekkor, ha G_B-ben i-ből elérhető ℓ és ℓ-ből elérhető j legfeljebb k hosszú ir. úttal, akkor B^k-ban az ij-edik elem > 0.
- **Köv.:** $A \geq 0$ nem primitív $\Leftrightarrow$ A^k reducibilis valamely $0 < k \leq n$-re.
- **Köv.:** $A \geq 0$ primitív $\Leftrightarrow$ $A^k > 0$ valamely $k \leq 2n(n-1)$-re.
  Megj.: Az éles korlát $n^2 - 2n + 2$ (Wielandt)

Imprimitív irreducibilis mátrixok

Lemma: Tfh. $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij}) \geq 0$ valós irred., amelyekre $|b_{ij}| \leq a_{ij}$. (Tudjuk már, hogy ekkor $\rho(B) \leq \rho(A) = \rho'(A)$.) Tfh. még: $\rho(B) = \rho(A)$ és $\lambda = \omega\rho(A)$ egy komplex sajátértéke B-nek, ahol $|\omega| = 1$.
Ekkor $B = \omega D^{-1}AD$ alakú, ahol $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ és $|d_i| = 1$.

Biz.: Legyen $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, hogy $Bv = \lambda v$. Mindegyik $i = 1, \ldots n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

így a $0 \neq w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix} \geq 0$-ra $Aw \geq \rho(A)w = \rho'(A)w$. Ekkor szükségképpen $w > 0$ és $Aw = \rho(A)w$. Utóbbi miatt $\leq$ helyett $=$ áll:

Imprimitív mátrixok II.

Lemma biz. (folyt):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

azaz

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}d_j|\gamma_j|\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j| \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol $d_j = \gamma_j/|\gamma_j|$. Ez csak úgy lehet, hogy $|b_{ij}| = a_{ij}$ és a nem-nulla komponensek mind a d_i irányba mutatnak:
ha $a_{ij} \neq 0$, akkor $b_{ij}/a_{ij}d_j = d_i$.

Így $b_{ij} = d_i^{-1}a_{ij}d_j$, legyen a_{ij} akár > 0, akár 0, azaz $B = D^{-1}AD$, ahol $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Imprimitív mátrixok III.

- $A \geq 0$ irred.
- **Áll.:** Tfh. $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$. Ekkor $\omega\rho(a)$ sajátértéke A-nak $\Leftrightarrow$ ωA hasonló hasonló A-hoz. Ez esetben $\omega\rho(a)$ egyszeres gyöke A karakt. polinomjának.
    - **Biz.:** $\Rightarrow$: Lemma $B = A$-val.
    - $\Leftarrow$: Tfh. $\omega A = D^{-1}AD$, azaz $A = \omega DAD^{-1}$. Ha $Av = \rho(A)v$, akkor $w = Dv$-re $Aw = \omega DAD^{-1}Dv = \omega DAv = \omega\rho(A)Dv = \omega\rho(A)w$.
    - Egyszeresség: Ha $\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - A$-nak, akkor $\omega\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - \omega A$-nak.
- **Köv.:** Ha $|\omega| = 1, |\omega'| = 1$, továbbá $\omega\rho(A)$ és $\omega'\rho(A)$ sajátértékei A-nak, akkor ω^{-1} és $\omega\omega'$ is sajátértéke A-nak.

  Biz.: Ha $\omega A = D^{-1}AD$ és $\omega' A = D'^{-1}AD'$, akkor $\omega^{-1}A = DAD^{-1}$ és $\omega\omega' A = (D'D)^{-1}AD'D$.
- **Áll.:** Ha A-nak s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek: $e^{2\ell\pi i/s}\rho(A)$, $(\ell = 0, \ldots, s-1)$.

Imprimitív mátrixok IV.

Tétel: Tfh. $A \geq 0$ irred, A-nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor akkor alkalmas P permutációs mátrixszal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & A_{12} & & & & \\ & & A_{23} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & A_{s-2,s-1} & \\ & & & & & A_{s-1,s} \\ A_{s1} & & & & & \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} illetve az ij helyen álló nulla (üres) blokk $\mu_i \times \mu_j$ méretű $(i, j = 1, \ldots, s)$.

Biz.: Tudjuk: $\omega = e^{2\pi i/s}$-vel léteznek $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$, hogy $|d_i| = 1$ és $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$-re $D^{-1}AD = \omega A$. Ekkor $\omega a_{ij} = \frac{d_j}{d_i} a_{ij}$, tehát $a_{ij} = 0$, hacsak nem $d_j = \omega d_i$.

Alkalmas permutációval elérhető: $0 = t_0 < t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_s \leq n$, D-nel $\omega^\ell d_1$-gyel megegyező diagonális elemei $d_{t_\ell+1}, \ldots, d_{t_{\ell+1}}$, $\ell = 0, \ldots, s-1$.

Imprimitív mátrixok V.

Tétel biz. (folyt:) Mivel A irred., van olyan $i \in \{1, \dots, t_1\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$ valamely $1 \leq j \leq n$-re. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega d_1$, így $t_1 + 1 \leq j \leq t_2$ (és innen $t_1 < t_2$).
Hasonlóan, ha $t_2 < n$, akkor van $i \in \{t_1 + 1, \dots, t_2\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$, amelyekre $a_{ij} \neq 0$. Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^2 d_1$, így $t_2 + 1 \leq j \leq t_3$ és $t_3 > t_2$.
Így folytatva: $t_0 < t_1 < t_1 < \dots < t_s \leq n$.
Ha $t_s < n$, akkor van olyan $0 \leq \ell \leq s - 1$, $t_\ell < i \leq t_{\ell+1}$ és $j > t_s$, hogy $a_{ij} = 0$.
Ekkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, ellentmondás.
Tehát $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = n$.

Ha $t_\ell + 1 \leq i \leq t_{\ell+1}$, és $a_{ij} \neq 0$, akkor $d_j = \omega d_i = \omega^{\ell+1} d_1$, tehát $t_{\ell+1} + 1 \leq j \leq t_{\ell+2}$, ahol $\ell + 1$ illetve $\ell + 2$ modulo s értendő.

Azaz a cserék után a mátrix tényleg a fenti alakú, ahol $\mu_\ell = t_\ell - t_{\ell-1}$.

Megj. Ha A fenti alakú, akkor A^s blokk diag. s blokkal, így A tényleg imprimitív.

Imprimitív mátrixok és periodicitás (pótlap)

- **Tétel átfogalmazása:** Tfh. $A \geq 0$ irred, A-nak $s > 1$ darab $\rho(A)$ absz. értékű sajátértéke van. Ekkor G_A csúcsai feloszthatók s darab $V_1, \dots, V_s$ részre úgy, hogy irányított élek csak V_i és V_{i+1} között mennek ($i+1$ modulo s értendő).
- **Köv.:** A tétel feltételei mellett G_A minden irányított körének a hossza osztható s-sel
- **Köv.:** Thf. $A \geq 0$ irred. Ekkor: G_A köreinek hosszúságának lnko-ja 1 $\Leftrightarrow$ A primitív.

  Biz.: $\Rightarrow$: előző köv.

  $\Leftarrow$: Tfh. az lnko $s > 1$. Ekkor A^ℓ főátlójában csak s-sel osztható ℓ-re van pozitív elem.

Sztochasztikus mátrixok

- $A \geq 0$ $n \times n$-es (oszlop-)sztochasztikus
- **Def. (emlékeztető):** A minden oszlopának összege 1
- **Ekv. jellemzés:** Aw sztoch. minden w sztoch. vektorra
- **Másik ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A^T-nak 1 sajátértékkel
- **Köv.:** sztoch. mátrixok szorzata is sztoch.
- **Tudjuk:** $\rho(A) = 1$.
- **Köv.:** Ha A még primitív is, akkor $A^k \longrightarrow v(1, \ldots, 1)$, ahol v a sztochasztikus sajátvektora A-nak 1 sajátértékkel.
- **Megj.** $v(1, \ldots, 1)$ minden oszlopa v

Sztochasztikus mátrixok/Markov láncok: értelmezések

- sztochasztikus sajátvektor(ok) 1 sajátértékkel: stacionárius eloszlás(ok)
- **Irreducibilitás:** Minden állapotból minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel
- **Imprimitivitás$\sim$ periodicitás**
- **Konvergenciatétel:** Primitív ("aperiodikus irred.") esetben tetsz. kezdeti elo. esetén a lánc eloszlása konvergál az (egyért.) stacionáriushoz

Duplán sztochasztikus mátrixok

- **Def.:** $A = (a_{ij}) \geq 0$ duplán sztochasztikus, ha A és A^T is (oszlop-)sztochasztikus.
- **Ekv. jellemzés:** $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektora A-nak és A^T-nak is 1 sajátértékkel
- **Köv.:** Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata és konvex kombinációja is duplán sztochasztikus
- **Példa:** Permutációmátrix (imprimitív).

Duplán sztochasztikus mátrixok II.

- **Áll.:** Duplán sztoch. A reduciblis $\Leftrightarrow$ alkalmas P permutációval $P^{-1}AP$ blokk-diag., azaz $\exists\ \emptyset \subset J \subset \{1,\dots,n\}$, hogy $i \in J, j \notin J$ esetén $a_{ij} = a_{ji} = 0$.
  Biz.: Tfh. $A = (a_{ij})$ imprimitív: van $\emptyset \subset J \subset \{1,\dots,n\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$, ha $i \notin J, j \notin J$. Ekkor $j \in J$-re
  $$1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J} a_{ij}, \text{ ezért } \sum_{j \in J}\sum_{i \in J} a_{ij} = |J|.$$
  Ekkor
  $$|J| = \sum_{i \in J}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J}\sum_{j \in J} a_{ij} + \sum_{i \in J}\sum_{j \notin J} a_{ij} = |J| + \sum_{i \in J}\sum_{j \notin J} a_{ij}, \text{ így } \sum_{i \in J}\sum_{j \notin J} a_{ij} = 0.$$
  Ebből $i \in J$, $j \notin J$ esetén $a_{ij} = 0$.
- **Konvergenciatétel:** Primitív duplán sztoch. A-ra
  $$A^k \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Birkhoff tétele

Tétel: A duplán sztochasztikus $\Leftrightarrow$ A permutációmátrixok konvex kombinációja.

- **Biz.:** $\Leftarrow$: permutációmátrixok d.sz. és d.sz. mátrixok konvex komb.-ja is d.sz.
- $\Rightarrow$:

  Segédáll.: $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow \exists\ \pi$ perm.: $a_{i\pi(i)} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$.
- **Indukció** segédáll. alapján, a nemnulla elemeinek a száma szerint:
  Legyen π a segédállban szereplő perm., $a = \min_i a_{i\pi(i)}$ és P π^{-1} mátrixa. Ekkor $A \neq P$ esetén $a < 1$ és $A = aP + (1-a)(1-a)^{-1}(A - aP)$: A P-nek és $(1-a)^{-1}(A - aP)$-nek konvex komb.-ja. $(1-a)^{-1}(A - aP)$ duplán sztoch. és kevesebb helyen poz., mint A.

Birkhoff tétele II

- **Segédáll.:** $A = (a_{ij})$ duplán sztoch. $\Rightarrow$ exists π perm.: $a_{i\pi(i)} > 0$.
- Tétel (Frobenius-König-Hall): Tetsz. véges $G = (U, V, E)$ páros gráfra
  $\exists$ G-ben U-t lefedő párosítás

  $$\Updownarrow$$

  bármely $W \subseteq U$-ra:

  $$|\{v \in V | \exists w \in W : (w, v) \in E\}| \geq |W| \quad \text{(Hall-feltétel).}$$
- **Segédáll biz.:** Legyen $U, V = \{1, \ldots, n\}$, $(i, j) \in E$, ha $a_{ij} \neq 0$. Ekkor keresett $\pi \leftrightarrow U$-t lefedő párosítás G-ben. Tetsz. $J \leq \{1, \ldots, n\}$-re legyen $J' = \{j | a_{ij} \neq 0 \text{ valamely } i \in J\text{-re}\}$.

  $$|J| = \sum_{i \in J} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J'} a_{ij} = \sum_{j \in J'} \sum_{i \in J} a_{ij} \leq \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = |J'|,$$

  tehát teljesül a Hall-feltétel.