BME MATEMATIKA VERSENY
2007.04.26.

Az **első és második feladat** megoldását **csak elsőéves** hallgatóknál értékeljük; a többi feladatra bárki adhat be megoldást. Részmegoldásokat, általánosításokat ill. lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladatot kérünk **külön lapra** írni. Minden lapon szerepeljen olvashatóan: a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör. Csak olvasható és világos okfejtést értékelünk.

1. Adott a térben 4 pont, amelyek nem esnek egy síkra. Hány olyan különböző parallelepipedon van, amelynek mind a 4 pont csúcspontja?

2. Tekintsük a térben az egész koordinátájú pontok rácsát, és 9 különböző rácspontot. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, amelyek által meghatározott szakasz felezőpontja szintén rácspont. Mutassunk példát arra, hogy ugyanez 8 rácspont esetén már nem feltétlenül igaz.

3. Bizonyítsd be, hogy ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek, akkor az átlók metszéspontjából az egyik oldalra bocsátott merőleges felezi a szemközti oldalt.

4. Legyen $G = (A, B, E)$ egy páros gráf (ahol A és B a csúcsok két diszjunkt halmazát jelöli, és E az élek halmazát, és egy él egyik végpontja mindig A-ban, a másik pedig B-ben van). Tegyük fel, hogy a gráfban nincs izolált pont (azaz olyan csúcs ahova nem fut be él), továbbá, hogy ha valamely $a \in A$ és $b \in B$ között van él, akkor a két csúcs fokszámára igaz, hogy $d(a) \geq d(b)$. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik A-t lefedő párosítás.

5. Az origó középű 1 sugarú gömbfelületen a következő eljárással adunk meg pontokat. Kisorsolunk egy $(-1, +1)$ közötti x értéket, majd egy $(0, 2\pi)$ közötti ϕ szöget, mindkettőt egyenletes eloszlás szerint, és egymástól függetlenül. Ezután azt az (x, y, z) pontot adjuk meg a gömbön, ahol az yz síkon az (y, z) pont a pozitív y féltengelytől a pozitív z féltengely felé való forgatással éppen ϕ szög alatt látszik. Egyenletes-e az így megadott pontok eloszlása a gömbfelületen?

6. Bizonyítsd be, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi \mathrm{cth} \pi - 1}{2}$. (Segítség: tekintsük az $f(z) = \frac{1}{z^2+1} \mathrm{ctg} \pi z$ függvényt.)

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = ?$

8. Egy tóban 3 fajta hal él, 18% ponty, 2 % harcsa, és 80% angolna. Egy halász a hálójában 10 halat talált, X pontyot, Y harcsát és Z angolnát. Mennyi az $\frac{X}{1+Y}$ várható értéke?

9. Legyenek A és B $m \times m$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy
$\lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n = e^{A+B}$.

10. Tekintsük a $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{L_i+\gamma_j} = \mu_j$, $j = 1, \ldots, n$ egyenletrendszert, ahol L_i, γ_j különböző valós számok, és $L_i + \gamma_j \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ha csak L_1-et változtatjuk, és a minden más L_i illetve γ_j és μ_j fixen marad, akkor $\sum_{i=1}^{n} x_i$ lineárisan változik L_1-ben, azaz $\sum_{i=1}^{n} x_i = aL_1+b$ valamely a, b valós számokra.

Ünnepélyes eredményhirdetés: május 10. csütörtökön 15.00-kor a V2.706 teremben. Előző napon az eredmények megtekinthetők a H.23-as szoba előtti hirdetőtáblán, a kijavított dolgozatokat pedig a szobában lehet megnézni. A feladatsor és az eredmények felkerülnek a www.math.bme.hu/ horvath honlapra.