1| Ha egy $\lambda(A)>0$ halmazon $|f|\ge D$, akkor $\int |f|^p \ge D^p\lambda(A)$,

$K \ge \|f\|_p \ge D\cdot\lambda(A)^{\frac{1}{p}} \to D$, ha $p\to\infty$. Ezért $D\le K \Rightarrow \lambda(|f|\ge K+\varepsilon)=0 \Rightarrow \lambda(|f|>K)=0$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \le K$

2| $\int_{-2}^{2} = \int_{-2}^{2}(x+1)g'(x)\,dx + \int_{[-2,2]}(x+1)\,d(\delta_0+2\delta_1) = \underbrace{\int_0^1 (x+1)2x\,dx}_{\frac{2}{3}+1} + \underbrace{\int_1^2 (x+1)2\,dx}_{4-1+2} + 1 + 2\cdot 2 = 11\tfrac{2}{3}$

3| a) $v_x = -u_y = -2\,\mathrm{ch}\,2x\cos 2y \Rightarrow v = -\mathrm{sh}\,2x\cos 2y + \alpha(y)$
$v_y = u_x = 2\,\mathrm{sh}\,2x\sin 2y \Rightarrow v = -\mathrm{sh}\,2x\cos 2y + \beta(x)$ $\Big\} \Rightarrow v = -\mathrm{sh}\,2x\cos 2y + c$

$f' = u_x + i v_x = u_x - i u_y \Rightarrow f'(0) = 0 - 2i = -2i$ $\quad \sin(iz) = i\,\mathrm{sh}\,z,\ \cos(iz) = \mathrm{ch}\,z$

Többletpont: $f(z) = \mathrm{ch}\,2x\sin 2y - i\,\mathrm{sh}\,2x\cos 2y + ic \overset{\downarrow}{=} \cos(2ix)\sin 2y - \sin(2ix)\cos 2y + ic = \sin(2y-2ix) + ic = \sin(-i(2x+2iy)) + ic = \sin(-2iz) + ic = -i\,\mathrm{sh}\,2z + ic$

b) Ha $f(z)$ reguláris egy zárt háromszöglapon, kivéve egy belső z_0 pontot, ahol $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$, akkor a háromszög határán $\oint_\Delta f(z)\,dz = 0$

4| $f(z) = \frac{f_0(z)}{(z-z_0)^n}$, $g(z) = \frac{g_0(z)}{(z-z_0)^m}$, $f_0(z_0)\ne 0$, $g_0(z_0)\ne 0$, f_0 és g_0 reguláris z_0-ban.

$f+g$-t közös nevezőre hozva látjuk, hogy $m\ne n$ esetén $\max(n,m)$-edrendű pólus van. Ha $m=n$ és f_0+g_0-nak k-szoros gyöke van z_0-ban, akkor $f+g = \frac{f_0+g_0}{(z-z_0)^n}$-nek $n-k$-adrendű pólusa van $k<n$-re, megszüntethető míg van $k\ge n$-re ($k-n$-szeres gyöke)

$fg = \frac{f_0 g_0}{(z-z_0)^{n+m}}$-nek $n+m$-edrendű pólusa

$f/g = \frac{f_0/g_0}{(z-z_0)^{n-m}}$-nek $n-m$-edrendű pólusa, ha $m<n$, megszüntethető míg, ha $m\ge n$ ($m-n$-szeres gyöke)

5| $|e^f| = e^{\mathrm{Re}\,f} \le e^M$ korlátos $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ e^f konstans $\Rightarrow f =$ konstans mod $2\pi i$.
De f folytonos is, ezért f konstans

6| $3<|3i+1| = \sqrt{10} < 4$ miatt a $3<|z|<4$ körgyűrűben keressük a Laurent sort, mert $z^2+z-12 = (z-3)(z+4)$. Parciális törtekre bontva:

$$\frac{z}{(z-3)(z+4)} = \frac{\frac{3}{7}}{z-3} + \frac{\frac{4}{7}}{z+4},\quad \frac{\frac{3}{7}}{z-3} = \frac{3}{7z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} \overset{|z|>3}{=} \frac{3}{7z}\left(1+\frac{3}{z}+\left(\frac{3}{z}\right)^2+\left(\frac{3}{z}\right)^3+\dots\right)$$

$$\frac{\frac{4}{7}}{z+4} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{1+\frac{z}{4}} \underset{|z|<4}{=} \frac{1}{7}\left(1-\frac{z}{4}+\left(\frac{z}{4}\right)^2-\left(\frac{z}{4}\right)^3+\dots\right)$$

A két sor összege a keresett Laurent-sor

7| $\mathrm{sh}\,2z$ gyökei egyszeresek (a derivált nem gyöke), $\frac{k\pi i}{2}$, ezek közül 0 és $\pm\frac{\pi i}{2}$ esik az ellipszisbe. Az $\frac{i\pi}{4}$ is az ellipszisbe eső kétszeres gyök a nevezőnek. Ezért

$$\oint = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{\frac{i\pi}{4}} + \operatorname*{Res}_{0} + \operatorname*{Res}_{\frac{i\pi}{2}} + \operatorname*{Res}_{-\frac{i\pi}{2}}\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}\,2z}\right)'\Bigg|_{z=\frac{i\pi}{4}} + \frac{\frac{1}{(4z-i\pi)^2}}{2\,\mathrm{ch}\,2z}\Bigg|_{z=0} + \Bigg|_{z=i\frac{\pi}{2}} + \Bigg|_{z=-\frac{i\pi}{2}}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\underbrace{\frac{1}{16}\cdot\frac{-2\,\mathrm{ch}\,i\frac{\pi}{2}}{\mathrm{sh}^2\frac{i\pi}{2}}}_{0,\text{ mert } \mathrm{ch}\,i\frac{\pi}{2}=\cos(-\frac{\pi}{2})=0} - \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2\underbrace{\mathrm{ch}\,i\pi}_{-1}} - \frac{1}{18\pi^2\underbrace{\mathrm{ch}(-i\pi)}_{-1}}\right] = \frac{2\pi i}{18\pi^2} = \frac{i}{9\pi}$$