

### Analízis 3 első zárthelyi, 2007.10.12.

1. [15p]

$$\int_L \bar{z}^2 dz =? \text{ ha } L \text{ az } y = x^2 \text{ görbe, } 0 \leq x \leq 2.$$

2. [10p] Melyik körgyűrűben konvergens a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 2^{|n|}}$$

Laurent-sor?

3. [15p] a. Mondjuk ki az unicitási tételt.

b. Adjuk meg a lényeges szingularitás definícióját, Laurent-sorral való jellemzését és mondjuk ki Picard tételét.

4. [15p] Mutassuk meg, hogy ha  $f(z)$  reguláris a  $|z| \leq R$  körlapon és a  $|z| = R$  körvonalon  $|f| \leq M$ , akkor a 0 bázispontú Taylor-sor együtthatóira

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Vezessük le ebből, hogy a Taylor-sor egyenletesen konvergens a  $|z| \leq r < R$  körlapokon.

5. [15p]

$$\oint_{|z-1|=\sqrt{3}} \frac{z^3 + 1}{z^4 - 1} dz =?$$

6. [15p] Keressük meg az  $1/(1 - e^{1/z})$  függvény izolált szinguláris helyeit, adjuk meg azok jellegét és a residuumokat. Alkalmazható-e a residuum- tétel

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - e^{1/z}} dz$$

kiszámítására?

7. [15p]

$$\oint_{|z-i-1|=4} \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2} dz =?$$