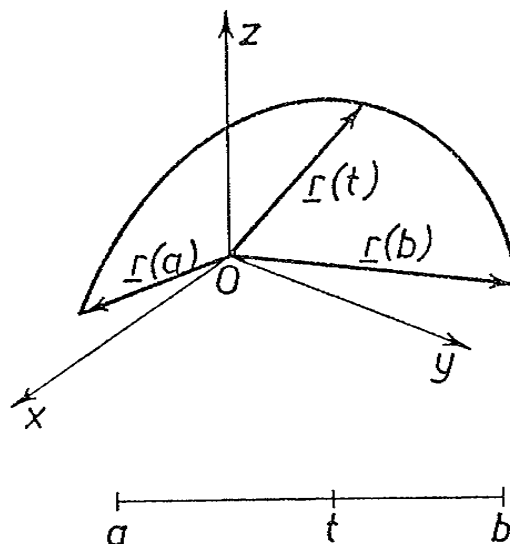


10. GÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

A térben mozgó pont pályája általában valamilyen görbe, amelyet ha koordináta-geometriai eszközökkel akarunk jellemezni, akkor megadjuk a pont $\underline{r}$ helyvektorát a különböző időpillanatokban. Ezáltal a t idő és a helyvektorok között egy $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvénykapcsolatot létesítettünk (10.1. ábra). Az ilyen függvényt vektor-skalár függvénynek nevezük. A görbéket ilyen függvényekkel fogjuk vizsgálni. Minthogy azonban nem minden vektor-skalár függvény ír le görbét, ezért először e függvényekkel kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket foglaljuk össze.



10.1. ábra.

Egyváltozós (vagy egy-paraméteres) vektor-skalár függvényt kapunk, ha a valós számok egy $a \leq t \leq b$ halmazának minden pontjához hozzárendelünk egy $\underline{r}(t)$ vektort.

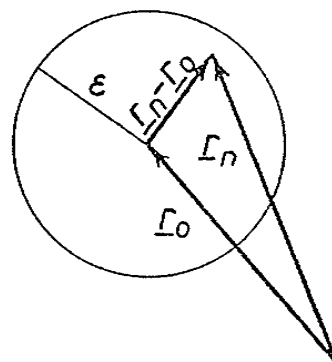
A vektor-skalár függvényt általában koordinátafüggvényeivel, vagyis a következő alakban adjuk meg:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t).$$

A vektoroknak egy $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ halmazát vektorsorozatnak nevezzük.

Az $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, \dots$ vektorsorozat konvergens és határértéke (limesze) az $\underline{r}_0$ vektor (jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{r}_n = \underline{r}_0$), ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $N(\varepsilon)$ szám, hogy $|\underline{r}_n - \underline{r}_0| < \varepsilon$, ha csak $n > N(\varepsilon)$.

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a vektorokat közös kezdőpontból indítva a vektorsorozat $n > N(\varepsilon)$ indexű elemei az $\underline{r}_0$ vektor végpontja körüli ε sugarú gömb belsejébe mutatnak (10.2. ábra).



10.2. ábra.

Vektor-skalár függvény határértéke

A vektor-skalár függvény határértékének fogalmára két — kimutathatóan egyenértékű — definíciót adunk.

I. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha bármely olyan $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ sorozatra, ahol t_n a t_0 -hoz tart ($t_n \neq t_0$) a megfelelő $\underline{r}(t_1), \underline{r}(t_2), \dots, \underline{r}(t_n), \dots$ vektorsorozat az $\underline{r}_0$ -hoz tart.

II. Az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy ha $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ és $(t \neq t_0)$, akkor $|\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)| < \varepsilon$.

A határérték jelölése:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}_0$$

Vektorsorozatok és vektorfüggvények konvergenciájához kapcsolódó geometriai fogalom az alakzatok konvergenciája.

Pontok sorozata konvergál egy P ponthoz, ha a pontok helyvektorai konvergálnak a P pont helyvektorához.

Egyenesek egy sorozata konvergál egy e egyeneshez (az e egyenes az egyenessorozat határhelyezete), ha az egyenesek pontjainak, illetőleg irányvektorainak egy-egy sorozata konvergál az e egyenes egy pontjához, illetőleg irányvektorához.

Síkok egy sorozata konvergál a σ síkhoz, ha a síkok pontjainak, illetőleg normálvektorainak egy-egy sorozata konvergál a σ sík egy pontjához, illetőleg normálvektorához.

Körök egy sorozata konvergál egy k körhöz, ha a körök középpontjai, sugarai, illetve síkjai konvergálnak a k kör középpontjához, sugarához, illetve síkjához.

Vektor-skalár függvény folytonossága

Az $\underline{r}(t)$ függvényt a t_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha a t_0 helyen van határértéke és az a függvényértékkel egyenlő: $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_0)$.

Kimutatható, hogy az $\underline{r}(t)$ függvény pontosan akkor folytonos a t_0 helyen, ha koordinátafüggvényei is folytonosak a t_0 helyen.

Folytonos vektor-skalár függvények összege, különbsége, skaláris- és vektoriális szorzata, valamint folytonos skalár-függvénnyel való szorzata is folytonos.

Vektor-skalár függvény differenciálhatósága

Az $\underline{r}(t)$ függvény a $t = t_0$ helyen differenciálható (deriválható), ha a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$

határérték létezik. Ezt a határértéket mondjuk az $\underline{r}(t)$ függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának.

Jelölése: $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ vagy $\dot{\underline{r}}(t)$. Ha a $t = t_0$ helyen vesszük a de-

deriváltat, akkor $\frac{d\underline{r}(t_0)}{dt}$, illetve $\dot{\underline{r}}(t_0)$ a derivált jelölése.

A derivált definíciójából következik, hogy $\underline{r}(t) = \underline{c}$ (áll.) függvény deriváltja a 0.

Levezethetők a következő differenciálási szabályok:

- a) $\frac{d}{dt}(\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t)) = \dot{\underline{r}}_1(t) + \dot{\underline{r}}_2(t),$
- b) $\frac{d}{dt}(c\underline{r}(t)) = c\dot{\underline{r}}(t)$ (c állandó szám),
- c) $\frac{d}{dt}[f(t)\underline{r}(t)] = \dot{f}(t)\underline{r}(t) + f(t)\dot{\underline{r}}(t)$ ($f(t)$ skálárfüggvény),
- d) $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t)\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\dot{\underline{r}}_2(t),$
- e) $\frac{d}{dt}[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)] = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t).$

Láncszabály

Ha $t = t(\tau)$, akkor $\frac{d}{d\tau} \underline{r}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$

Példaként megmutatjuk, hogy az $\underline{r}(t)$ függvényre vonatkozó differenciálási szabályok alkalmazásával hogyan lehet az $|\underline{r}(t)|$ deriváltját előállítani:

$$|\underline{r}(t)|^2 = (\underline{r}(t))^2$$

tehát

$$\frac{d}{dt}|\underline{r}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\underline{r}(t))^2$$

azaz

$$2|\underline{r}(t)| \frac{d}{dt}|\underline{r}(t)| = 2\underline{r}(t)\dot{\underline{r}}(t).$$

Innen

$$\frac{d}{dt}|\underline{r}(t)| = \frac{\underline{r}(t)}{|\underline{r}(t)|} \cdot \dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}^0 \dot{\underline{r}}.$$

Állítsuk elő az $\underline{r}(t) = i \cos^2 t + j t \sin t + k t^2$ függvény derivált függvényét. A koordinátafüggvényeket deriválva

$$\dot{\underline{r}}(t) = i(-2 \cos t \sin t) + j(\sin t + t \cos t) + k 2t$$

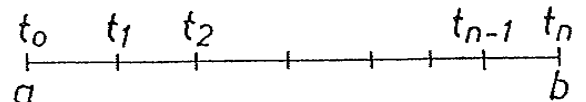
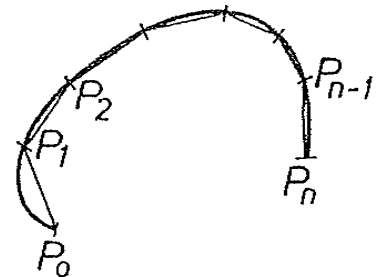
adódik.

Megjegyzés: A deriválás eredményeként kapott függvények folytonossága és differenciálhatósága ismét kérdés-ként merülhet fel. Ha az $\underline{r}(t)$ függvény differenciálható,

akkor második deriváltját $\ddot{\underline{r}}(t)$ -vel s í.t. $\ddot{\underline{r}}(t)$ -vel jelöljük a harmadik deriváltat. A gyakorlati igényeknek általában megfelel, ha a vizsgált görbéket leíró $\underline{r}(t)$ függvényekről feltesszük, hogy háromszor folytonosan differenciálhatók és $\dot{\underline{r}}(t) \neq \underline{0}$ a vizsgált intervallumon.

Görbék ívhossza. Áttérés az ívhossz szerinti paraméterezésre

Az $a \leq t \leq b$ intervallumon értelmezett $\underline{r}(t)$ által meghatározott görbét rektifikálhatónak mondunk, ha az $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ paraméterekhez $\underline{r}(t)$ által rendelt $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok (10.3. ábra) által meghatározott törött vonalak $\sum_{i=0}^{n-1} P_i P_{i+1}$ hosszai-



10.3. ábra.

nak létezik határértéke, amidőn a maximális $P_i P_{i+1}$ húr hossza is 0-hoz tart.

Ezt a határértéket nevezzük a megfelelő görbedarab s ív-hosszának:

$$s = \lim_{\max P_i P_{i+1} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n P_i P_{i+1}.$$

Az általunk vizsgált görbéknek van ívhosszuk és

$s = \int_a^b |\dot{\underline{r}}| dt$ -ből számítható ki. A feltételeinknek eleget tevő görbék esetében az $s(t)$ ívhosszfüggvénynek van inverze, tehát létezik egy $t(s)$ függvény, amivel elvben minden $\underline{r}(t)$ függvényünkénél át tudunk térni az ívhossz szerinti paraméterezésre.

Az ívhossz szerinti paraméterezéssel felírt vektorfüggvény $\underline{r} = \underline{r}(s)$ alakú, a deriváltakat pedig $\underline{r}'$, $\underline{r}''$, $\underline{r}'''$ -vel jelöljük.

Vektor-skalár függvény deriváltjának geometriai jelentése

Az $\underline{r}(t)$ által leírt görbe érintője az $\underline{r}(t_0)$ helyvektorú P görbepontban a $\overrightarrow{PQ}$ határhelyzeteként jön létre, midőn a Q pont a P -hez tart (10.4. ábra).

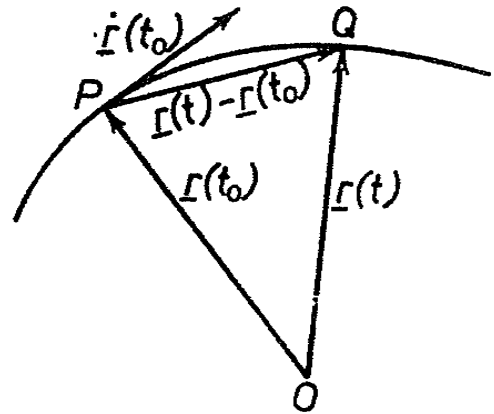
A $\overrightarrow{PQ} = \underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)$, tehát

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\underline{r}}(t_0)$$

vektor az $\underline{r}(t)$ függvény deriváltja a P pontban éppen az érintővektor.

Az imént mondottak függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz szerinti paraméterezés esetén megmutatható, hogy az $\underline{r}'(s)$ érintővektor abszolút értéke $|\underline{r}'(s)| = 1$, tehát a helytől függetlenül egységvektor a $\underline{t} = \underline{r}'$, amelyet általános pa-

raméterezés esetén $\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}$ állíthatunk elő.



10.4. ábra.

Kisérő triéder

Látható, hogy $(\underline{r}')^2 = \dot{t}^2 = 1$ alapján ennek deriváltja $2\underline{r}'\underline{r}'' = 2\dot{t}\dot{t}' = 0$, ami $\underline{t}$ és $\dot{t}'$ merőlegességét jelenti. Az $\underline{r}'' = \dot{t}'$ vektor irányába mutató egységvektort a görbe főnormális egységvektorának nevezzük.

A $\underline{t}' = G\underline{n}$ alakban állítható elő, és a G szorzószámot a görbe pontbeli görbületének nevezzük, amely az érintővektor „változási sebességét” mutatja.

A $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorok síkját a görbe pontbeli simulósík-jának nevezzük. Általános paraméterezés esetén az $\underline{r}$ és $\dot{\underline{r}}$ vektorok a simulósíkban vannak.

Ha a kinematikában szokásos módon az $\underline{r}(t)$ -ben szereplő t paraméter az idő, akkor a sebességvektor $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v} \cdot \underline{t}$, a gyorsulásvektor $\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a} \underline{t} + G \underline{n}$ alakban írható fel, ahol $\underline{v}$ a pályamenti sebességet, a $\underline{a}$ pályamenti gyorsulást és G a térgörbe görbületét jelenti. (A görbületet később tárgyaljuk.)

A $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ szorzattal kapjuk a simulósík normális egységvektorát. A $\underline{b}$ vektort a görbe binormális egységvektorának nevezzük.

A görbe pontjaihoz rendelt $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ egységvektorok által kifeszített derékszögű triédert a görbe kisérő triéderének nevezzük.

A kísérő triéder lapsíkjai a simulósíkon kívül az $\underline{n}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott normálsík, és a $\underline{b}$ és $\underline{t}$ vektorok által meghatározott rektifikálósík.

A kísérő triéder $\underline{b}$, illetve $\underline{n}$ vektorának általános paraméterezés esetén való előállítása:

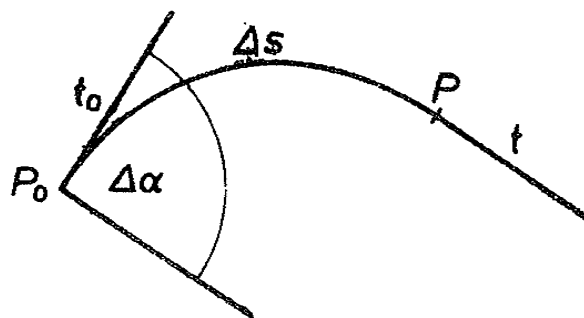
$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} \quad \text{illetve} \quad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|}.$$

Ezek ismeretében a kisérő triéder élegyeneseinek egyenletrendszere, illetve a kisérő triéder lapsíkjaianak egyenlete könnyen felírható.

Görbe görbülete és torziója

A simulósíkot síkok határhelyzeteként is értelmezhetjük: ha P_1, P_2, P_3 a görbe három, nem egy egyenesbe eső pontja, és az általuk meghatározott sík határhelyzetét vizsgáljuk, midőn P_1, P_2, P_3 pont a görbe P_0 pontjához tart, akkor a határhelyzet a P_0 ponthoz tartozó simulósík.

A görbe görbületét a P_0 pontban a következőképpen is értelmezhetjük: (a $t' = G\mathbf{n}$ korábbi definícióval egyenértékűen). Legyen a görbe P_0 pontbeli érintője t_0 és egy P pontbeli érintő t . Jelölje $\Delta\alpha$ a t és t_0 érintők szögét, Δs



10.5. ábra.

pedig a P_0P görbeív

hosszát (10.5. ábra).

Nyilván Δs nullához tart,

ha a P ponttal a P_0 -hoz közeledünk. A görbe görbületének a

$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = G$ határértéket nevezzük.

A görbületet általános paraméterek esetén a

$$G = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

kifejezésből számíthatjuk ki. Az $R = \frac{1}{G}$ -t a görbe görbületi sugarának nevezzük. Azt a kört, amelynek síkja a simulósík, középpontja pedig a főnormális irányában a görbeponttól R távolságra van, a görbe görbületi körének, a kör középpontját pedig a görbületi középpontnak nevezzük.

A görbületi középpontba mutató $\underline{c}$ helyvektor

$$\underline{c} = \underline{r}(t_0) + R\mathbf{n} = \underline{r}(t_0) + \frac{1}{G}\mathbf{n}.$$

A görbére jellemző másik mennyiség a simulósík változási sebességét mutatja. Mínt hogy a simulósík normálisa a binormális, és a binormális ívhossz szerinti deriváltja

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$$

alakban írható fel, a τ szorzószámot nevezzük a görbe torziójának (vagy csavarodásának).

A torzió abszolút értéke a binormális $\Delta\beta$ szögváltozása és a hozzá tartozó Δs ívhossz hányadosának határértékeként is megkapható:

$$|T| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}.$$

A torziót általános parameterezés esetén a következő alakban írhatjuk fel:

$$T = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Frenet formulák

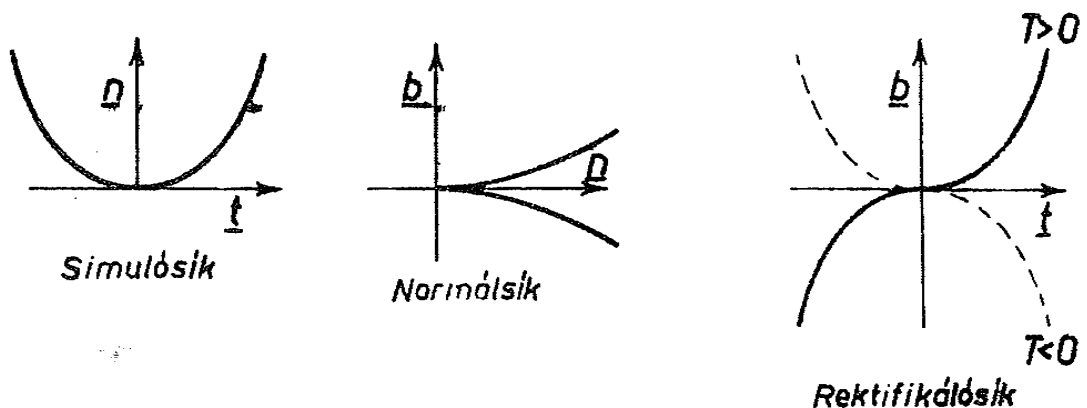
Ivhossz szerinti parameterezés esetén a kísérő triéder élvektorainak deriváltjai a görbület és torzió segítségével az alábbi módon adódnak:

$$\underline{t}' = G\underline{n}$$

$$\underline{n}' = -G\underline{t} + T\underline{b}$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n}.$$

A görbe pontjának környezetében való viselkedését jól szemlélteti, ha a ponthoz tartozó kísérő triéder lapjaira való merőleges vetületét megnézzük. Ezt szemlélteti a 10.6. ábra.



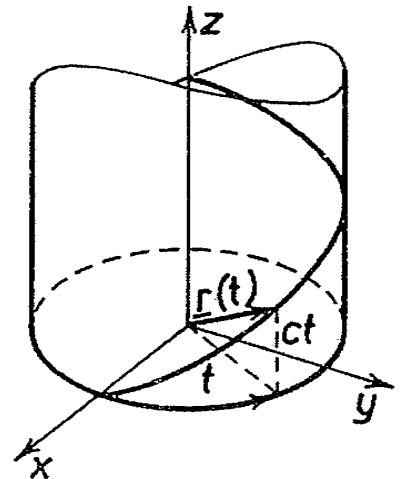
10.6. ábra.

Látható, hogy a görbe vetülete akkor oszidosos görbe, ha a vetítési irány az érintővektor iránya.

A csavarvonal

A csavarvonal egy forgáshengeren mozgó pont pályagörbéje, amelynél a tengellyel párhuzamos elmozdulás arányos a tengely körüli szögelfordulással (10.7. ábra).

Eszerint az r sugarú hengerre írt csavarvonal koordinátás előállítására $x = r \cos t$; $y = r \sin t$; $z = ct$, ahol c ($c \neq 0$) az arányossági tényező. Egy menethez 2π szögelfordulás tartozik, tehát a teljes menetemelkedés $m = c2\pi$.



10.7. ábra.

Határozzuk meg a csavarvonal görbületét és torzióját:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \sin t) + \underline{j}r \cos t + \underline{k}c,$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(-r \cos t) + \underline{j}(-r \sin t),$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}(r \sin t) + \underline{j}(-r \cos t),$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{r^2 + c^2},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{i}cr \sin t - \underline{j}cr \cos t + r^2 \underline{k},$$

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{r^2(r^2 + c^2)}, \quad \ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = cr^2.$$

Tehát

$$G = \frac{r}{r^2 + c^2} \quad \text{és} \quad T = \frac{c}{r^2 + c^2},$$

mindkettő független a pont helyétől, vagyis állandó.

Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t)$ görbe $t = 1$ pontjában a kíséző triéder élégyeneseseinek egyenletrendszerét, a kíséző triéder lapsíkjaainak egyenletét. Határozzuk meg a pontban a görbületet, a görbületi kör középpontját és a görbe torzióját.

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(t^2 - 1) + \underline{j}(t + 2) + \underline{k}(t^3 - t) \quad \underline{r}(1) = 3\underline{j} \quad P(0, 3, 0)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = 2t\underline{i} + \underline{j} + 3t^2\underline{k} \quad \dot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{k} \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 2\underline{i} + 6\underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{k} \quad \ddot{\underline{r}}(1) = 6\underline{k}$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6\underline{i} - 8\underline{j} - 2\underline{k}$$

a binormális irányába mutató vektor: (3, -4, -1)

$$(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14\underline{i} - 16\underline{j} + 22\underline{k}$$

a főnormális irányába mutató vektor: (-7, -8, 11)

$$\text{Az érintő egyenes: } \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\text{A binormális egyenes: } \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$\text{A főnormális egyenes: } \frac{x}{-7} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z}{11}$$

$$\text{A simulósík: } 3x - 4(y - 3) - z = 0$$

$$\text{A normálisík: } 2x + (y - 3) + 2z = 0$$

$$\text{A rektifikálósík: } -7x - 8(y - 3) + 11z = 0$$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\ddot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = -12$$

Tehát a görbület $G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, a görbületi középpont:

$$\underline{n} = -\frac{7}{3\sqrt{26}} \underline{i} - \frac{8}{3\sqrt{26}} \underline{j} + \frac{11}{3\sqrt{26}} \underline{k} \quad \text{a főnormális egységvektor}$$

$$\frac{1}{G} \underline{n} = \frac{-189}{156} \underline{i} - \frac{216}{156} \underline{j} + \frac{297}{156} \underline{k} = -\frac{63}{52} \underline{i} - \frac{72}{52} \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

$$\underline{c} = -\frac{63}{52} \underline{i} + (3 - \frac{72}{52}) \underline{j} + \frac{99}{52} \underline{k}$$

A torzió

$$T = \frac{-12}{104} = \frac{-3}{26}$$

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 126. old. - 132. old. 37-77. feladatokat és 122. old. - 125. old. 11-26. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 243-254. pontok.