

23. FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

Felület analitikus megadási módjai

A felület analitikus megadását jól szemlélteti a gömbfelület pontjainak analitikus geometriai jellemzése. A földrajzi tájékozódást a földgömbön a szélességi körök és a délkörök teszik lehetővé. Ennek alapulvételével egy gömbi pont koordinátáit két szög (paraméter) segítségével határozzuk meg. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja és az egyenlítőt képzeljük az xy síkba, a délkörök közül pedig az xz síkban levő gömbi főkört tekintsük kiindulási délkörnek.

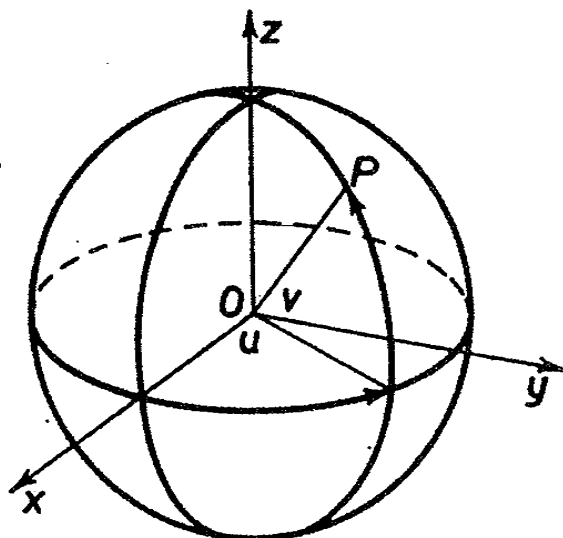
Ha a gömb sugara R és a gömbfelület egy P pontján áthaladó délkör síkja az xz síkkal u szöget (23.1. ábra), illetve az OP egyenes az xy síkkal v szöget alkot, akkor a P pont koordinátái nyilván:

$$\begin{aligned} x &= R \cos v \cos u \\ y &= R \cos v \sin u \\ z &= R \sin v \end{aligned}$$

és nyilván $0 < u \leq 2\pi$,

illetve $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ az u

és v értelmezési tartománya. A gömb pontjainak koordinátáit két változó paraméter függvényeiként kapjuk meg.



23.1 ábra.

Ugyanezt a gömböt jellemezhetjük $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ alakú egyenlettel is,

valamint a $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvénnyel.

A konkrét példa alapján a felületek általános megadási módjai a következők lehetnek:

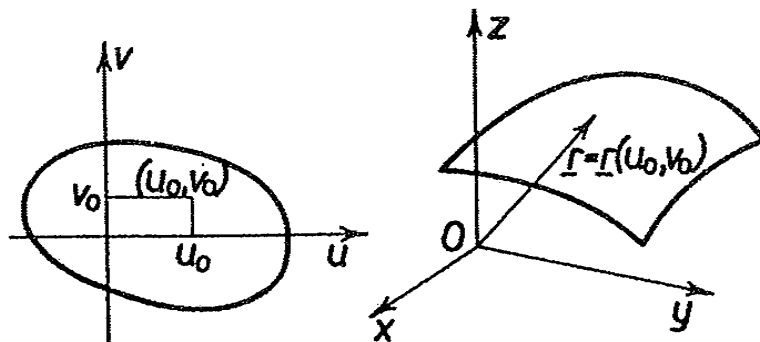
A felület Gauss-féle megadása:

Vegyünk egy u, v síkbeli derékszögű koordinátarendszerben megadott tartományt. Ennek minden pontjához tartozik egy (u_0, v_0) rendezett számpár (23.2. ábra). A tartomány (u_0, v_0) pontjához rendeljünk egy térbeli derékszögű koordinátarendszerben levő $\underline{r}$ helyvektort.

Ha a síkbeli tartomány minden pontjához elvégezzük ezt a hozzárendelést, akkor egy kétváltozós $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ vektorfüggvényt nyerünk.

Egy ilyen kétváltozós vektorfüggvény alkalmas lehet

egy felület megadására (de nem minden kétváltozós vektorfüggvényhez tartozik felület). Ha egy felületet $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = ix(u, v) + jy(u, v) + kz(u, v)$ alakban előállítunk, akkor ezt a megadási módot a felület Gauss-féle megadásának mondjuk. Az $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ kétváltozós függvények az $\underline{r}(u, v)$ vektorfüggvény koordinátafüggvényei.



23.2. ábra.

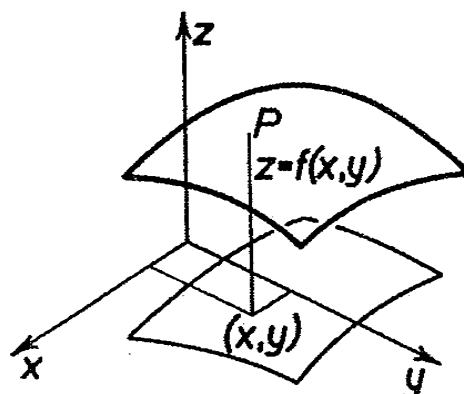
A felület Euler-Monge-féle megadása:

Ha egy felületet a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvényvel állítunk elő, akkor a felület Euler-Monge megadásáról beszélünk. Ez a megadási mód tulajdonképpen az xy sík egy tartományának pontjaihoz rendeli a felületi pontokat (23.3. ábra).

A felület Euler-Monge-féle megadása mindig visszavezethető a kétváltozós vektorfüggvényvel történő előállításra a következőképpen:

Az $\underline{r}(u, v)$ függvény $x(u, v)$, $y(u, v)$ és $z(u, v)$ koordinátafüggvényei:

$x = u$, $y = v$ és $z = f(u, v)$.



23.3. ábra.

A felület megadása implicit alakban:

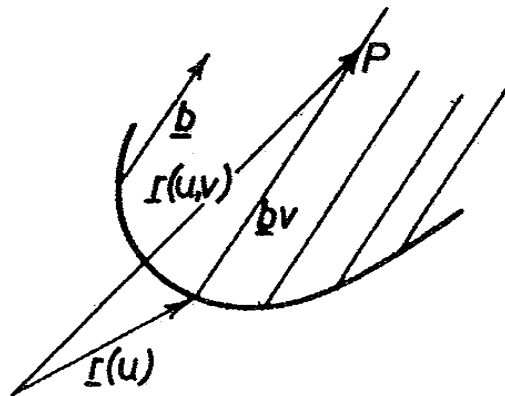
Ha egy felület pontjait $F(x, y, z) = 0$ alakú egyenlettel jellemezzük, akkor a felületet implicit alakban adjuk meg.

Leggyakrabban előforduló felületek előállítása:

1) Sík. Ha a sík egy pontjába mutató helyvektor $\underline{r}_0$ és a sík két nem párhuzamos vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor a sík

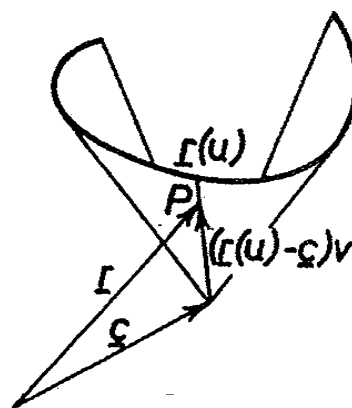
bármely pontja előállítható, az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}_0 + \underline{a} \cdot u + \underline{b} \cdot v$ alakú kétváltozós vektorfüggvénnyel. (1. a sík egyenlete)

2) Hengerfelület. A hengerfelület úgy jön létre, hogy egy vezérgörbe pontjain át a henger alkotói irányával párhuzamos egyeneseket húzunk. Ennek megfelelően (23.4. ábra), ha egy henger vezérgörbéjét az $\underline{r}(u)$ vektor-skalar függvény adja meg és a henger alkotói párhuzamosak egy $\underline{b}$ vektorral, akkor a henger egy tetszőleges P pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + \underline{b} \cdot v$ kétváltozós vektorfüggvénnyel jellemezhető.



23.4. ábra

3) Kúpfelület. A kúpfelület alkotói a kúp csúcsát a vezérgörbe pontjaival összekötő egyenesek. Ennek megfelelően, ha adott egy kúp C csúcsának c helyvektora, továbbá a vezérgörbét leíró $\underline{r}(u)$ vektor-skalar függvény, akkor a kúpfelület egy alkotójának a csúcspontból kiinduló irányvektorát $\underline{r}(u) - \underline{c}$ vektor adja (23.5. ábra). E kúpalkotón levő tetszőleges P felületi pont $\underline{r}$ helyvektora az $\underline{r} = \underline{c} + (\underline{r}(u) - \underline{c})v = \underline{r}(u, v)$ alakú kétváltozós vektorfüggvénnyel adható meg, ami a kúp Gauss-féle előállítás.

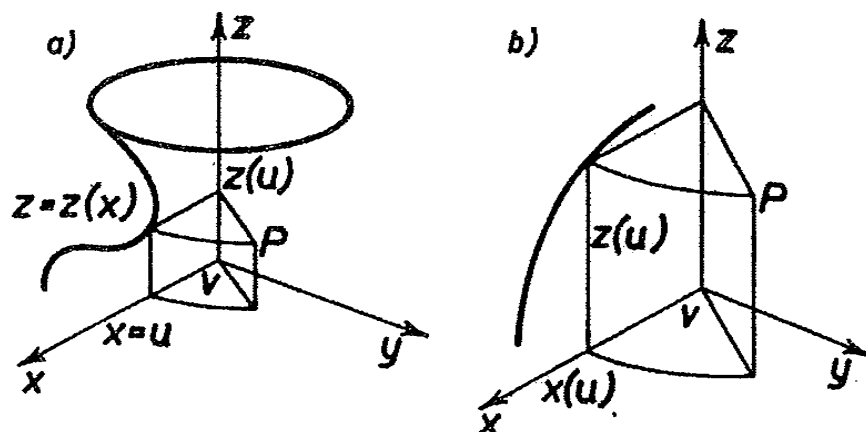


23.5. ábra.

4) Forgásfelület. A forgásfelületet egyértelműen meghatározza forgástengelye és ezzel egy síkban levő ún. meridiángörbe, amelynek megforgatása által létrejön a felület. A számításokban a forgástengely általában valamelyik koordinátatengely szokott lenni és a meridiángörbét a koordinátatengelyre illeszkedő koordinátasíokban adjuk meg.

Legyen a forgástengely a z koordinátatengely és a meridiángörbe legyen az xz koordinátasíokban megadva (23.6. ábra).

Ha a meridiángörbe $z = z(x)$ alakban van megadva, akkor a meridiángörbét az $\underline{r}(u) = \underline{i} \cdot u + z(u)\underline{k}$ vektor-skalar függvénnyel jellemezhetjük (23.6.a. ábra) és ennek megfelelően egy P felületi pont, amely v nagyságú szögelfordulással állt elő, az $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i} \cdot u \cdot \cos v + \underline{j} \cdot u \cdot \sin v + \underline{k} \cdot z(u)$ helyvektorral jellemezhető. Ez a felület Gauss-féle megadásának az alakja.



23.6. ábra

Ha a meridiángörbét $\underline{r}(u) = \underline{i} \cdot x(u) + \underline{k} z(u)$ vektor-skálár függvénnyel adjuk meg, akkor ennek egy pontját v szöggel elforgatva, a kapott P felületi pont (23.6.b. ábra) helyvektora és a felület megadása is az $\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \underline{i} \cdot x(u) \cos v + \underline{j} \cdot x(u) \sin v + \underline{k} \cdot z(u)$ alakban írható fel.

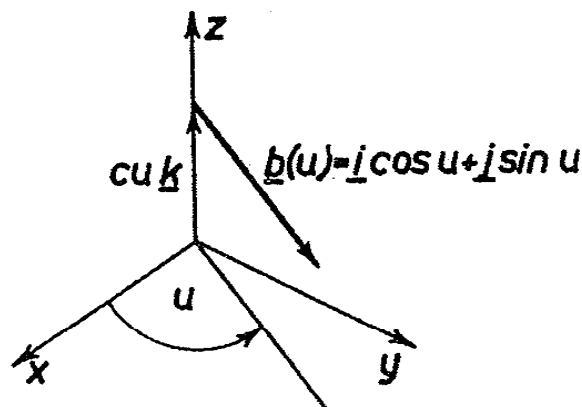
Például: ha az xz koordinátasíkjában levő $(r_0, 0)$ középpontú r sugarú kört forgatjuk meg a z tengely körül, akkor a kör $\underline{r}(u) = (r_0 + r \cos u) \underline{i} + r \sin u \cdot \underline{k}$ egyenlete alapján a létrejövő tóruszfelület Gauss-féle előállítás:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(r_0 + r \cos u) \cos v + \underline{j}(r_0 + r \cos u) \sin v + \underline{k} \cdot r \sin u.$$

5) Közönséges csavarfelület. A közönséges csavarfelület úgy jön létre, hogy a z tengely — mint csavartengely — körül az x tengelyt (alkotó) csavarmozgással mozgatjuk; vagyis a z tengely körül az alkotót u szöggel elforgatva, az u -val arányos mértékben a tengely irányában elmozgatjuk (közben az alkotó az xy síkkal párhuzamos marad) (23.7. ábra).

Az alkotó irányába mutató egységvektor az u szög elforgatás után $\underline{b}(u) = \cos u \underline{i} + \sin u \underline{j}$, az alkotó magassága pedig $c \cdot u$. Ennek megfelelően a felület tetszőleges alkotójának valamely pontjába mutató $\underline{r}$ helyvektor:

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = c \cdot u \cdot \underline{k} + v \cdot \underline{b}(u) = v \cdot \cos u \underline{i} + v \cdot \sin u \underline{j} + c \cdot u \cdot \underline{k},$$



23.7. ábra.

ez pedig éppen a közönséges csavarfelület Gauss-féle előállítására.

Példák felületek felírására:

- 1) Irjuk fel annak a hengerfelületnek a Gauss-féle előállítását, amelynek alapgörbéje az $\underline{r}(u) = (3 + 2\sin u)\underline{i} + (5 + 4\cos u)\underline{j}$ és alkotóinak irányát az $\underline{a}(2, 1, 3)$ vektor adja meg.

Megoldás: Az alapgörbe nyilván egy olyan ellipszis az xy koordinátasíkjában, amelynek középpontja $(3, 5)$, nagytengelye az y tengellyel párhuzamos és 8 egység hosszúságú, kistengelye pedig x -szel párhuzamos, hossza 4:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1. \text{ A vektoregyenlet alapján a felület előállítása: } \underline{r}(u, v) = (3 + 2\sin u + 2v)\underline{i} + (5 + 4\cos u + v)\underline{j} + 3v\underline{k}.$$

- 2) Irjuk fel annak a kúpfelületnek az előállítását, amelynek vezérgörbéje az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ $z = 0$ egyenletű hiperbola, csúcsa pedig a $C(1, 2, 8)$ pont.

Megoldás: A vezérgörbe a $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ azonosság alapján $\underline{r}(u) = (\cosh u)\underline{i} + (\sinh u)\underline{j}$ paraméteres alakba írható fel, így a vektoregyenlet alapján a kúpfelület előállítása $\underline{r}(u, v) = (1 + (\cosh u - 1)v)\underline{i} + (2 + (\sinh u - 2)v)\underline{j} + 8(1 - v)\underline{k}$.

- 3) Irjuk fel annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $z = \frac{1}{x}, y = 0$ egyenletű hiperbola és a forgástengely a z tengely.

Megoldás: Jelen esetben $\underline{r}(u) = u\underline{i} + \frac{1}{u}\underline{k}$ paraméteres alakban adható meg a meridiángörbe ($u \neq 0$, bármely valós szám). Tehát a felület előállítása $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v + \underline{k}\frac{1}{u}$ alakban adódik.

- 4) Adjuk meg annak a forgásfelületnek az előállítását, amelynek meridiángörbéje $\underline{r}(u) = (1 + 2\cos u)\underline{i} + (2 + \sin u)\underline{j}$ a forgástengely pedig az x tengely.

Megoldás: Ebben az esetben az $\underline{r}(u)$ első koordináta-függvénye változatlan marad, mivel x a forgástengely. Tehát az előállítás:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(1 + 2\cos u) + \underline{j}(2 + \sin u)\cos v + \underline{k}(2 + \sin u)\sin v.$$

- 5) Irjuk fel az $\underline{r}(u)$ térgörbe érintői által meghatározott felület vektoregyenletét, majd ennek alapján az $\underline{r}(u) = u^2\underline{i} + u^3\underline{j} + u^4\underline{k}$ görbe érintői által alkotott felület előállítását. (Legyen $u > 0$.)

Megoldás: Az $\underline{r}(u)$ görbepontból egy $\underline{\dot{r}}(u)$ irányú vektor vezet el a felület egy pontjához. Ennek megfelelően

$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\dot{\underline{r}}(u)$ a felület vektoregyenlete. Példánkban szereplő görbe érintővektora

$\dot{\underline{r}}(u) = i2u + j3u^2 + k4u^3$ alakú, tehát a felület előállítás:

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + 2uv)i + (u^3 + 3u^2v)j + (u^4 + 4u^3v)k.$$

6) Irjuk át implicit alakra az $\underline{r}(u,v) = iu + ju^2\cos v + ku^2\sin v$ felületet.

Megoldás: $y^2 + z^2 = u^4(\cos^2 v + \sin^2 v)$,
tehát $y^2 + z^2 = x^4$ azaz $x^4 - y^2 - z^2 = 0$

a felület implicit megadása.

Kétváltozós vektorfüggvényekre vonatkozó alapfogalmak

Határérték: Az $\underline{r}(u,v)$ függvénynek az (u_0, v_0) helyen vett határértéke létezik és $\underline{r}_0$ vektor, ha $(u,v) \neq (u_0, v_0)$ feltételezése mellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|\underline{r}_0 - \underline{r}(u,v)| < \varepsilon$, ha $|u - u_0| < \delta$ és $|v - v_0| < \delta$.

Határérték jelölése: $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}_0$

Folytonosság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u_0, v_0) helyen folytonosnak mondjuk, ha határértéke megegyezik a függvény értékével; azaz ha

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \underline{r}(u,v) = \underline{r}(u_0, v_0)$$

Megjegyzés: Az $\underline{r}(u,v) = i \cdot x(u,v) + j \cdot y(u,v) + k \cdot z(u,v)$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ kétváltozós koordinátafüggvények folytonosak.

Differenciálhatóság: Az $\underline{r}(u,v)$ függvényt az (u,v) helyen differenciálhatónak nevezzük, ha a függvény $\Delta \underline{r}$ tetszőleges megváltozásához létezik olyan $\underline{d}_u$ és $\underline{d}_v$ vektor, amelyek segítségével a megváltozás a következő alakban írható fel:

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \underline{r}(u,v) = \underline{d}_u \Delta u + \underline{d}_v \Delta v + \underline{e}_1 \Delta u + \underline{e}_2 \Delta v,$$

ahol $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ az $u, v, \Delta u, \Delta v$ függvényei és $\Delta u \rightarrow 0$

$\Delta v \rightarrow 0$ esetén $|\underline{e}_1| \rightarrow 0$ $|\underline{e}_2| \rightarrow 0$.

Megjegyzés: $f(x,y)$ kétváltozós függvény parciális deriváltja. Az $f(x,y)$ függvényt az (a,b) helyen x , illetve y szerint parciálisan differenciálhatónak mondjuk, ha az egyváltozós $f(x,b)$, illetve $f(a,y)$ egyváltozós függvény az $x = a$, illetve $y = b$ helyen differenciálható. Az $f(x,b)$

függvény x szerinti deriváltját az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett x szerinti parciális deriváltjának mondjuk. (Hasonlóan beszélünk az $f(x,y)$ függvény (a,b) helyen vett y szerinti parciális deriváltjáról.

Jelölése: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$ illetve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$.

A parciális deriválással nyert függvények ismét kétváltozós függvények, amelyeket lehet ismételtén parciálisan deriválni. Az így kapott parciális deriváltakat második parciális deriváltaknak mondjuk.

Jelölésük: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx} ,$$

illetve

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy} .$$

Tétel: Ha $f(x,y)$ olyan kétváltozós függvény, amelynél f_{xy} és f_{yx} az (a,b) hely környezetében létezik és e helyen folytonosak, akkor $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. (Young-tétele)

A fentiekhez hasonló módon értelmezhető a kétváltozós vektorfüggvények parciális differenciálhatósága. Egy kétváltozós vektorfüggvény $\underline{r}(u,v)$ az (a,b) helyen u szerint parciálisan differenciálható, ha az $\underline{r}(u,v)$ vektor-skalár függvény a helyen deriválható.

Jelölések: $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u$; $\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v$,

illetve a második parciálisokra

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u^2} = \underline{r}_{uu} ; \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial u \partial v} = \underline{r}_{vu} ;$$

$$\frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v \partial u} = \underline{r}_{uv} ; \frac{\partial^2 \underline{r}(u,v)}{\partial v^2} = \underline{r}_{vv} .$$

Beláthatók a következő tételek:

Ha $\underline{r}(u,v)$ függvény differenciálható az (u,v) helyen, akkor

$$\underline{d}_u = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \underline{r}_u \quad \text{és} \quad \underline{d}_v = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \underline{r}_v .$$

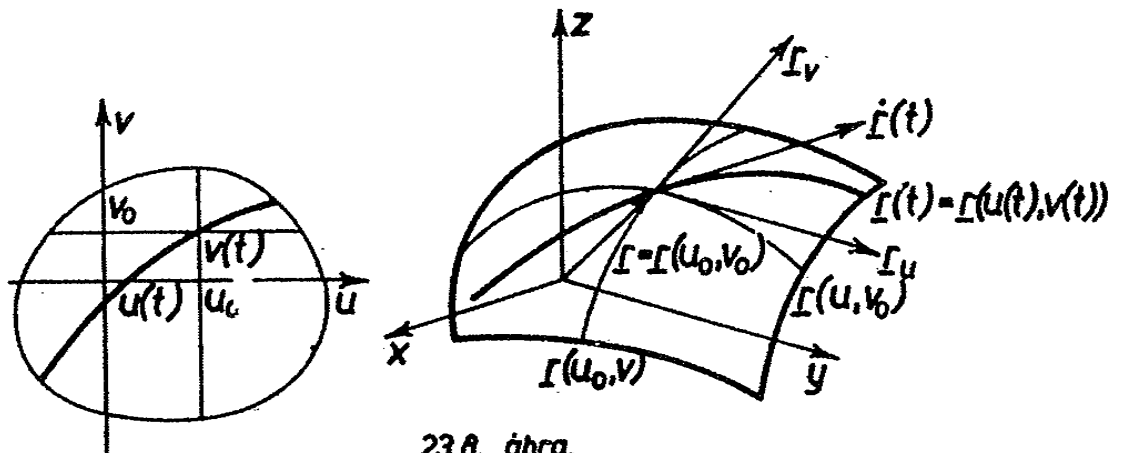
(Tehát differenciálható $\underline{r}(u,v)$ függvény első parciális deriváltjai léteznek. Igaz továbbá, hogy ha egy $\underline{r}(u,v)$ függ-

vény $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ parciális deriváltjai az (u, v) helyen léteznek és folytonosak, akkor az $\underline{r}(u, v)$ függvény differenciálható e helyen.)

Ha $\underline{r}(u, v)$ második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, akkor a második vegyes parciális deriváltaknál a deriválás sorrendje felcserélhető, vagyis $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$.

Felületi görbe

Ha a felület előállításában szereplő paramétertartományon tekintünk egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméteres görbét, akkor ennek (bizonyos feltételek teljesülése esetén) az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületen egy $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ vektor-skalár függvénnyel megadott görbe felel meg (23.8. ábra).



23.8. ábra.

E felületi görbék közül a legegyszerűbben adódnak azok, amelyek a paramétertartományon haladó $u = u_0$ és $v = v_0$ egyenesdaraboknak felelnek meg, és az $\underline{r}(u_0, v)$, illetve $\underline{r}(u, v_0)$ alakú vektor-skalár függvények alakjában állíthatók elő. Ezeket a görbéket nevezzük a felület paramétervonalainak: $\underline{r}(u, v_0)$ az ún. u paramétervonal ($v_0 = \text{konstans}$), $\underline{r}(u_0, v)$ a v paramétervonal ($u_0 = \text{konstans}$).

A térgörbék differenciálgeometriájából következik, hogy az $\underline{r}(u, v)$ u , illetve v szerinti parciális deriváltjai a paramétervonalak $\underline{r}_u$, illetve $\underline{r}_v$ érintővektorait adják.

Megjegyzés: Egyszerűség kedvéért és ezzel a gyakorlat igényeihez alkalmazkodva a továbbiakban az $\underline{r}(u, v)$ -vel előállított felületről feltételezzük, hogy első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ nem párhuzamosak a felület vizsgált pontjában.

Felületen haladó görbe előállítása

Egyszerű esetekben a paramétertartományon adott $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméterezésű görbének megfelelő

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$$

felületi görbe a megfelelő helyettesítéssel előállítható.
Például, ha a felület Gauss-féle előállítására

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 - 2v)\underline{i} + (u^3 + uv)\underline{j} + uv \underline{k}$$

és a paramétertartományon az $u(t) = -2t$, $v(t) = 3t^2$ paraméterezésű görbének megfelelő felületi görbét akarjuk előállítani, akkor az u , illetve v behelyettesítésével az

$$\underline{r}(t) = (4t^2 - 6t^2)\underline{i} + (-8t^3 - 6t^3)\underline{j} + (-2t) \cdot 3t^2 \underline{k},$$

vagyis az

$$\underline{r}(t) = -2t^2 \underline{i} - 14t^3 \underline{j} - 6t^3 \underline{k}$$

térgörbe adódik.

Felületi görbe érintője. Érintősík

Ha adott a paramétertartományon egy $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbe, amelynek $u(t)$ és $v(t)$ koordinátafüggvényei t szerint differenciálhatók, akkor a felületen haladó $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ görbe differenciálható és érintővektora az

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

alakban állítható elő.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a felület egy P pontján áthaladó felületi görbék érintői az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatók elő, vagyis a két vektor által meghatározott síkban vannak (l. 23.8. ábra). Ezt a síkot nevezzük a felület érintősíkjának.

A felület érintősíkjának a normálisa — amit a felület normálisának is mondunk — ezek szerint

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$$

vektoriális szorzattal számítható ki. Ennek ismeretében már fel tudjuk írni a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét, illetve a felületi érintősík egyenletét.

Megjegyezzük, hogy az Euler-Monge-féle felületmegadási módban a $z = f(x, y)$ függvény parciális deriváltjait szokás a következőképpen jelölni: $p = f_x$, $q = f_y$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$. Ezekkel a mennyiségekkel is elvégezhető

számításaink java része, de egy-két esettől eltekintve csak az áttekintendő „képlet”-anyagot növelnénk ezáltal. Az esetek többségében egyszerűbb a már megismert módon a Gauss-féle megadási módra átírni a felületet. Az egyik kivételes eset, amikor egyszerűsítést jelenthet a fenti jelölések alkalmazása a felületi normális-vektor előállítására, ami a következő formában lehetséges: $\underline{m}(-p, -q, 1)$. Az $F(x, y, z) = 0$ implicit alakban adott felület normálisvektora: $\underline{m}(F_x, F_y, F_z)$.

Például: tekintsük az $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u^3 - 2v^2) + \underline{j}uv^2 + \underline{k}(u^2v - u)$ felületen haladó görbét, amely a paramétertartomány $u = t^2$, $v = -2t^3$ görbéjének felel meg. Határozzuk meg a $t = 1$ -nek megfelelő pontban a felületi görbe érintőjét!

A vizsgált pont az $u = 1$, $v = -2$ pont, a felületen a $P(-7, 4, -3)$ pont, amelyben a paramétervonalak érintői

$$\underline{r}_u = \underline{i} \cdot 3u^2 + \underline{j}v^2 + \underline{k}(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\underline{r}_v = \underline{i}(-4v) + \underline{j}2uv + \underline{k} \cdot u^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2t & \text{a } t = 1 \text{ helyen } \dot{u} &= 2, \quad \dot{v} = -6. \\ \dot{v} &= -6t^2 \end{aligned}$$

Tehát a felületi görbe érintője a P pontban

$$\dot{\underline{r}} = 2\underline{r}_u - 6\underline{r}_v \quad (-42, 32, -16).$$

A felületi normális-vektor:

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -16\underline{i} - 43\underline{j} - 44\underline{k}.$$

A felületi normális egyenesének egyenletrendszere:

$$x = -7 - 16\lambda \quad y = 4 - 43\lambda \quad z = -3 - 44\lambda$$

A felület érintősíkjának egyenlete:

$$-16(x + 7) - 43(y - 4) - 44(z + 3) = 0.$$

Felületi görbék hajlásszöge:

A felület egy P pontján áthaladó felületi görbék hajlásszögét érintővektoraik hajlásszögeként számítjuk. Ennek megfelelően a felület két paramétervonalának φ hajlásszöge

$$\cos \varphi = \frac{\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v}{|\underline{r}_u| |\underline{r}_v|}$$

összefüggés alapján számítható.

Két felület metszésvonalaként adódó térgörbe:

Az $F(x,y,z) = 0$ és $G(x,y,z) = 0$ egyenletekkel megadott felületek metszésvonalát a két egyenletből álló egyenletrendszer határozza meg. Az elmélet részletes kifejtését mellőzve, konkrét példán mutatjuk meg, hogyan lehet a metszésvonal egy pontjában a térgörbe jellemzőit (görbület, torzió, kísérő triéder stb.) meghatározni.

Legyen a két felület $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ és $G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$. Vizsgáljuk a metszésvonalat a $P(-2, 1, 6)$ pontban. (Meggyőződhetünk arról, hogy ez a pont mindkét felület egyenletét kielégíti.)

A két felület metszésvonalát tekintsük olyan vektor-skalár függvénynek, amelynek paramétere valamelyik koordináta, pl. x . Ekkor az $\underline{r}(x) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j} + z(x)\mathbf{k}$. A térgörbe jellemzőinek meghatározására az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjait kell meghatározni a tekintett P pontban. Ekkor $\dot{\underline{r}}(x) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}(x)\mathbf{j} + \dot{z}(x)\mathbf{k}$, $\ddot{\underline{r}}(x) = \ddot{y}(x)\mathbf{j} + \ddot{z}(x)\mathbf{k}$ és így tovább. A koordinátafüggvények deriváltjait úgy határozzuk meg, hogy y -t és z -t az x függvényének tekintjük és eszerint deriváljuk az egyenleteket x szerint. Ekkor $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$ deriváltja $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$; $x^2 + 2y^2 - z = 0$ deriváltja $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$. Az x, y, z helyébe a P pont koordinátáit helyettesítve $\dot{y}$ és $\dot{z}$ -ra egy egyenletrendszert kapunk:

$$-8 + 6\dot{y} + 12\dot{z} = 0$$

$$-4 + 4\dot{y} - \dot{z} = 0$$

Ennek megoldása $\dot{y} = \frac{28}{27}$, $\dot{z} = \frac{4}{27}$, tehát a görbe érintővektora $\dot{\underline{r}}(1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27})$.

Az $\ddot{\underline{r}}(0, \ddot{y}, \ddot{z})$ vektor koordinátáit úgy határozhatjuk meg, hogy a $4x + 6y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$ és a $2x + 4y\dot{y} - \dot{z} = 0$ egyenleteket x szerint deriváljuk: $4 + 6\dot{y}^2 + 6y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$ és $2 + 4\dot{y}^2 + 4y\ddot{y} - \ddot{z} = 0$. Ezekbe P , illetve $\dot{\underline{r}}$ koordinátáit behelyettesítve, az $\ddot{y}$ és $\ddot{z}$ -ra kapott egyenletrendszerből számíthatjuk ki az $\ddot{\underline{r}}$ koordinátáit.

Ez az eljárás folytatható s így $\ddot{\underline{r}}$ is meghatározható. Az $\underline{r}(x)$ függvény deriváltjainak ismeretében a metszésvonal adott pontjához tartozó görbület, torzió, kísé-
ró triéder az ismert módon számítható ki.

Felületi görbe görbülete. Adott felületi pontban a felület görbületi viszonyainak vizsgálata

A felületi görbe egy pontjában az érintővektort az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u \cdot \dot{u} + \underline{r}_v \cdot \dot{v}$$

alakban nyertük. Látható, hogy $\dot{u}$ és $\dot{v}$ pontos ismerete helyett elegendő ezek arányát az $\dot{u}/\dot{v}$ hányadost ismerni, mert az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} \underline{r}_u + \underline{r}_v$ vagy $\underline{r}_u + \frac{\dot{v}}{\dot{u}} \underline{r}_v$ lineáris kombinációk az $\dot{\underline{r}}$ -tal

egyirányú vektorokat, tehát a felületi görbe érintőjét állítják elő. A vizsgálat tovább folytatható, meg lehet határozni a felületi görbe kísé-
ró triéderét, görbületét, torzióját stb.

Számunkra a felületi görbe görbületének meghatározása szükséges, mert egy felületi pontot a rajta áthaladó felületi görbékkel, illetve azok görbületi viszonyaival akarunk jellemezni.

A felületi görbe görbületét meghatározó számítások összetettsége miatt, a jobb áttekinthetőség céljából jelöléseket vezetünk be.

Például látható, hogy $\dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{r}_u^2 \dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \dot{u} \dot{v} + \mathbf{r}_v^2 \dot{v}^2$ kifejezés az $\mathbf{r}_u^2 = E$, $\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = F$ és $\mathbf{r}_v^2 = G$ jelölések bevezetésével $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ alakra hozható, amelyet első alapformának és a benne szereplő E , F , G mennyiségeket Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeknek nevezünk.

Bevezetjük továbbá a $D = \sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ jelölést.

A Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket a következő definícióval adjuk meg:

$$L = \frac{1}{D} \mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \quad M = \frac{1}{D} \mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \quad N = \frac{1}{D} \mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v.$$

A másodrendű főmennyiségekben a második parciális deriváltak és az első parciális deriváltak vegyes szorzatai szerepelnek. A másodrendű főmennyiségekből képezett második alapforma $L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$ alakú.

Ha egy felületi görbe érintője $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}$ alakban írható fel és a felületi görbe főnormális vektorának a felületi normális vektorral bezárt szöge φ , akkor a felületi görbe $\frac{1}{R}$ görbületét az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

kifejezésből számítjuk ki.

Például: vegyük a korábban tekintett felületet

$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(u^3 - 2v^2) + \mathbf{j}uv^2 + \mathbf{k}(u^2v - u)$ és ennek $P(-7, 4, -3)$ ($u = 1, v = -2$) pontján áthaladó $\dot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{r}_u - 6\mathbf{r}_v$ érintőjű felületi görbét, amelynek főnormálisa a felületi normálissal $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szöget zár be.

A felületi görbe görbületének kiszámításához szükségünk van az első és másodrendű parciális deriváltakra, illetve a Gauss-féle főmennyiségekre:

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} \cdot 3u^2 + \mathbf{j}v^2 + \mathbf{k}(2uv - 1) \quad (3, 4, -5)$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{i}(-4v) + \mathbf{j}2uv + \mathbf{k}u^2 \quad (8, -4, 1)$$

$$E = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$F = 24 - 16 - 5 = 3$$

$$G = 64 + 16 + 1 = 81$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v (-16, -43, -44)$$

$$D = \sqrt{EG - F^2} = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{4041} = 3\sqrt{449}$$

$$\underline{r}_{uu} = 16u + 2v \quad (6, 0, -4) \quad \underline{r}_{uu}\underline{r}_u = -96 + 176 = 80$$

$$\underline{r}_{uv} = 12v + 2u \quad (0, -4, 2) \quad \underline{r}_{uv}\underline{r}_u = 172 - 88 = 84$$

$$\underline{r}_{vv} = 1(-4) + 12u \quad (-4, 2, 0) \quad \underline{r}_{vv}\underline{r}_v = 64 - 86 = -22$$

$$L = \frac{80}{3\sqrt{449}} \quad M = \frac{84}{3\sqrt{449}} \quad N = \frac{-22}{3\sqrt{449}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Tehát a felületi görbe görbülete:

$$\frac{1}{R} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \frac{80 + 168(-3) - 22 \cdot 9}{50 + 6(-3) + 81 \cdot 9} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{449}} \cdot \left(\frac{-622}{761} \right)$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{1244}{2283\sqrt{449}}$$

A felületi görbe görbületének meghatározására szolgáló kifejezésből és konkrét számításainkból is kiolvashatók a következők:

a) A rögzített P felületi pontban az $\underline{r}(u, v)$ függvény $\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{r}_{uu}, \underline{r}_{uv}, \underline{r}_{vv}$ parciális deriváltjai, valamint a belőlük képezett E, F, G és L, M, N főmennyiségek állandók, függetlenül a P-n átmenő felületi görbétől.

b) A P pontban közös érintőjű felületi görbékre nézve az érintő irányát meghatározó $\dot{u}/\dot{v}$ hányados értéke állandó.

c) A P pontban közös főnormálisú felületi görbékre a főnormális és a P ponthoz tartozó felületi normális φ hajlásszöge állandó.

Ezek szerint az ilyen felületi görbék görbülete a P pontban ugyanazt az értéket adja, mint az érintő és a főnormális által kifeszített (simuló) síkkal adódó síkmetszet görbülete. — E tény lehetővé teszi, hogy egy felületi ponton áthaladó felületi görbe görbületét a felület egy síkmetszetének görbületeként állítsuk elő. Tehát a továbbiakban — a felületi térgörbék mellőzésével — csupán a felületi síkmetszetek görbületi viszonyainak vizsgálatára szorítkozhatunk.

Meusnier tétele:

Vizsgáljuk most a P felületi pontban közös érintőjű felületi síkmetszetek görbületét. Ez azt jelenti, hogy a felületi görbe görbületének képletében csupán a φ -t változtatjuk, vagyis a főnormális az érintő körül forgatjuk. $\varphi = 0$ esetén a $\cos \varphi = 1$, a főnormális és a felületi normális egybeesik és ekkor a felületi normális és az érintő

által kifeszített síkkal kapott ún. normálmetszet $\frac{1}{R_n}$ görbületét kapjuk: $\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{Eu^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$.

Meusnier tétele:

Közös érintőjű ferde metszet és a normálmetszet görbülete között az

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_n} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{ill.} \quad R = R_n \cdot \cos \varphi$$

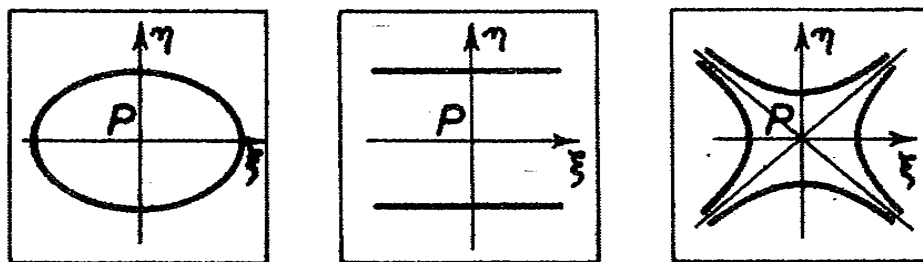
összefüggés áll fenn; vagyis a ferde metszetek görbületi sugarai a normálmetszet görbületi sugarának merőleges vetületei.

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban csupán a normálmetszetek görbületeinek vizsgálatára szorítkozzunk.

Most a P felületi pontban a felületi normális körül forgatjuk az érintőt. Minden érintőirányhoz tartozik egy-egy normálmetszet.

Dupin-féle indikátrix

A felület P pontján áthaladó normálmetszetek a felületi érintősíkból különböző P ponton áthaladó érintőirányokat (egyeneseket) metszenek ki. E normálmetszetekhez tartozó görbületi sugár R_n , abszolút értékének négyzetgyökét a megfelelő érintőirányokra P pontból mindkét irányban felmérjük. Valamennyi érintőirányra felmérve a $\sqrt{|R_n|}$ -t a végpontokból vagy ellipszis vagy párhuzamos egyenespár, vagy konjugált hiperbolapár rajzolódik ki. Az érintősíkban így adódó görbéket a felület P pontjához tartozó Dupin-féle indikátrixának mondjuk (23.9. ábra).



23.9. ábra.

A felületi pontot elliptikusnak nevezzük, ha az indikátrix ellipszis, parabolikusnak mondjuk, ha az indikátrix párhuzamos egyenespár (elfajult parabola). Ha az indikátrix konjugált hiperbolapár, akkor a P pont hiperbolikus pont.

Főirányok, főgörbületek, főmetszetek

Az indikátrix a P felületi ponthoz tartozó érintősíkban mindhárom esetben kijelöl két egymásra merőleges érin-

főirányt, amelyeket a 23.9. ábrán ξ -vel, illetve η -val jelöltünk. Ezen irányokhoz tartozó normálmetszetek (főmetszetek) görbülete, illetve a görbületi sugara a P pontban extrémális tulajdonságú. Ezeket az irányokat főirányoknak (r_1, r_2), a hozzájuk tartozó görbületeket $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ -t főgörbületeknek nevezzük.

Ha az indikátrix ellipszis, akkor a P ponthoz tartozó valamennyi merőleges metszet, így a főmetszetek görbületei is azonos előjelűek, ennek megfelelően az indikátrix egyenlete a főirányok (ξ, η) koordinátarendszerében

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} + \frac{\eta^2}{|R_2|} = 1.$$

Ha az indikátrix két párhuzamos egyenes, akkor az egyik főgörbület pl. $\frac{1}{R_1} = 0$, az indikátrix egyenlete $\eta^2 = |R_2|$.

Ha az indikátrix két konjugált hiperbola, akkor az egyik hiperbolához tartozó érintőirányokhoz tartozó normálmetszetek görbülete pozitív, a másikhoz tartozók negatívok. Az aszimptotákhoz tartozó normálmetszetek görbülete 0. Az indikátrix egyenlete

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} - \frac{\eta^2}{|R_2|} = \pm 1.$$

A főirányok meghatározása tulajdonképpen két érintőirány előállítását jelenti az $\dot{r}_u$ és $\dot{r}_v$ lineáris kombinációjaként, tehát csupán az $\dot{u}/\dot{v}$ vagy $\dot{v}/\dot{u}$ arányt kell kiszámítani. Ez a következő determináns-alakban megadott másodfokú egyenletből lehetséges:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ill. pl. } \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = k \text{ esetén } \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

A k -ra kapott k_1 és k_2 értékekből $\dot{u}_1, \dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$ értékek meghatározhatók, és így a két főirány $r_1 = \dot{u}_1 \dot{r}_u + \dot{v}_1 \dot{r}_v$, illetve $r_2 = \dot{u}_2 \dot{r}_u + \dot{v}_2 \dot{r}_v$ alakban áll elő. Mint-hogy a két főirány egymásra merőleges, ezért az egyik főmetszet normálisa a másik főirány és viszont. Ennek alapján a főmetszetek síkjának egyenlete könnyen felírható. A főgörbületek kiszámítása a főirányokat meghatározó $\dot{u}_1, \dot{v}_1$, illetve $\dot{u}_2, \dot{v}_2$ értékek alapján a normálmetszetre korábban megismert görbület-képlet segítségével is lehetséges.

A másik lehetőség az, hogy a főgörbületek szorzatára és összegére könnyen kezelhető számítási módszer vezethető le.

A főgörbületek szorzata: Gauss-féle vagy szorzatgörbület

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

A főgörbületek összege: Minkowski-féle vagy összeggörbület

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

A Gauss-féle görbület előjele megadja a felületi pont jellegét. A $K > 0$ elliptikus-, $K = 0$ parabolikus-, $K < 0$ hiperbolikus pontot jelent. Minthogy $EG - F^2 > 0$, tehát a pont jellegét $LN - M^2$ előjele adja meg. (Az Euler-Monge-féle felületmegadás esetén az $rt - s^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ előjele megegyezik a szorzatgörbület előjelével, tehát megadja a felületi pont jellegét.)

Euler-tétele: Az r_1 főiránnyal ϑ szöget alkotó érintő-irányhoz tartozó normálmetszet görbülete:

$$\frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{R_2} \sin^2 \vartheta.$$

Például: Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}2uv + \underline{k}(u - v)$ felület $u = -1, v = -1$ pontjában ($P(2,2,0)$) a főirányokat, a főmetszetek síkjainak egyenletét, a szorzat és összeggörbületet, továbbá állapítsuk meg a felületi pont jellegét.

$$\begin{aligned} \underline{r}_u &= \underline{i}2u + \underline{j}2v + \underline{k} & (-2, -2, 1) \\ \underline{r}_v &= \underline{i}2v + \underline{j}2u - \underline{k} & (-2, -2, -1) \\ \underline{r}_{uu} &= \underline{i} \cdot 2 & (2, 0, 0) \\ \underline{r}_{uv} &= 2\underline{j} & (0, 2, 0) \\ \underline{r}_{vv} &= \underline{i} \cdot 2 & (2, 0, 0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \underline{r}_u \times \underline{r}_v &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\underline{i} - 4\underline{j} \\ \underline{r}_u \times \underline{r}_v &= (4, -4, 0) \end{aligned}$$

$$E = 9 \quad F = 7 \quad G = 9 \quad D = \sqrt{32}$$

$$L = \frac{8}{\sqrt{32}} \quad M = \frac{-8}{\sqrt{32}} \quad N = \frac{8}{\sqrt{32}}$$

A főirányok:

$$\frac{8}{\sqrt{32}} \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ 9 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{128}{\sqrt{32}} (1 - k^2) = 0 \quad \text{innen} \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= -1 \end{aligned}$$

tehát

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = -4\underline{i} - 4\underline{j}$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = 2\underline{k}.$$

Főmetszetek síkjai: $2z = 0$, ill. $-4(x-2) - 4(y-2) = 0$.
 Szorzat-, illetve összeggörbület: $K = 0$; $H = \sqrt{2}$.

A felületi pont parabolikus pont.

Utolsó példánkban a megadott felületet nem egy pontjában, hanem az egész felületet vizsgáljuk. Ennek megfelelően a parciális deriváltakkal (és nem azok adott paraméterértékekhez tartozó behelyettesített értékeivel) számolunk:

Állapítsuk meg, hogy milyen jellegűek az

$$\underline{r}(u,v) = (u-v)\underline{i} + (u+v)\underline{j} + uv\underline{k}$$

alakban megadott felület pontjai.

A feladatnál nyilván az $LN - M^2$ előjelét kell meghatározni; minthogy azonban $LN - M^2 =$

$$= \frac{1}{D} \left[(\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v)(\underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v) - (\underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v)^2 \right], \text{ és } D > 0, \text{ elegendő a zárójelben levő vegyszorzatokkal dolgozni.}$$

$$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j} + v\underline{k}, \quad \underline{r}_v = -\underline{i} + \underline{j} + u\underline{k} \text{ továbbá } \underline{r}_{uu} = 0, \quad \underline{r}_{uv} = \underline{k}, \quad \underline{r}_{vv} = 0.$$

Látható, hogy

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = (u-v)\underline{i} - (u+v)\underline{j} + 2\underline{k}$$

innen

$$\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v = \underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 0 \quad \text{és} \quad \underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v = 2.$$

$$(\underline{r}_{uu}\underline{r}_u\underline{r}_v)(\underline{r}_{vv}\underline{r}_u\underline{r}_v) - (\underline{r}_{uv}\underline{r}_u\underline{r}_v)^2 = -4$$

a felület valamennyi szóba jöhető pontjára, tehát a fenti felület minden pontja hiperbolikus pont.

Gyakorlásra javasoljuk: Geometriai feladatok: 133-144. old. 78-164. feladatokat és 125. old. 27-28. feladatokat.

Elméleti tananyag: Tankönyv 256-272. pontok.