

G Ö R B É K

Ruletták

1. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenes mentén. Irjuk fel a kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (ciklois).

2. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenesen. Irjuk fel egy olyan pont pályájának az egyenletét, amely a kör középpontjától d távolságra van és a mozgás közben a körhöz viszonyított helyzete nem változik ($d < a$ esetén nyújtott, $d > a$ esetén hurkolt ciklois).

3. Állítsuk elő a kör lefejtésének paraméteres egyenletrendszerét, azaz egy mozdulatlan kör alakú tárcsára szorosan feltekert fonál végpontja által leírt görbe egyenletét, miközben a fonalat feszesen tartva legombolyítjuk (kör-evolvens).

4. Tekintsünk egy adott a sugarú kör kerületén csúszás nélkül gördülő egyenest, amelyhez egy rá merőleges, d hosszúságú szakaszt rögzítettünk. Irjuk fel a szakasz végpontja által leírt görbe egyenletét! Milyen görbét kapunk $d = a$ esetén?

5. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül a mozdulatlan R sugarú körön mindig kívülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (epiciklois).
Milyen görbe adódik $r = R$ esetén?

6. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül az $R > r$ sugarú kör kerületén mindig belülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzített kerületi pontja által leírt pálya egyenletét (hipociklois).
Milyen görbe adódik az $R = 4r$ és az $R = 2r$ esetekben?

7. Egy $2r$ sugarú kör kerületén végiggördül egy r suga-

rú kör mindig belülről érintve azt. Mutassuk meg, hogy a gördülő körhöz képest rögzített helyzetű, de nem a kerületén fekvő pont ellipszist ír le.

8. Bizonyítsuk be, hogy a ciklois tetszőleges pontjában húzott normális áthalad a cikloist előállító kör legalsó, az érintő pedig a legfelső pontján (lásd az 1. feladatot!). Ezt a tulajdonságát felhasználva szerkesszük meg a ciklois tetszőleges pontjához tartozó normálisát és érintőjét.

9. Bizonyítsuk be, hogy az

$x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$
körevolvens összes normálisának a koordinátarendszer origójából mért távolsága egyenlő.

10. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

asztroid érintőjének a koordinátatengelyek közé eső szakasza az érintési ponttól függetlenül a hosszúságú.

Görbék egyenlete, érintő

Adjuk meg a görbét az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ függvényvel, ekkor az érintőegyenest egyenletrendszerre

$$\underline{R} = \underline{r} + \tau \dot{\underline{r}} \quad \text{vagy} \quad \frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}},$$

ahol $\underline{R} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ az érintő futó pontjának helyvektora.

11. Ha egy pont egyenletes körmozgást végez egy bizonyos egyenes körül, és ugyanakkor egyenletes egyenesvonalú mozgással halad az egyenessel párhuzamosan, akkor a pályáját hengeres csavarvonalnak nevezzük. Válasszuk z tengelynek az adott egyenest és írjuk fel a hengeres csavarvonalat előállító vektor-skalár függvényt.

Határozzuk meg a csavarvonalnak a koordinátasíkokra

eső merőleges vetületeit!

12. Viviani-féle görbének nevezzük egy gömbfelületnek és egy olyan körhengerfelületnek a metszésvonalát, amelynek egyik alkotója áthalad a gömb középpontján és átmérője a gömb sugarával egyenlő. Adjuk meg ezt a görbét egy vektor-skalár függvénnyel.

Mutassuk meg, hogy a Viviani görbe illeszkedik egy olyan kúpfelületre is, amelynek csúcsa a henger- és gömbfelület érintési pontja és tengelye a henger tengelyével párhuzamos.

13. A z tengelyt hegyes szögben metsző egyenes állandó szögsebességgel forog a z tengely körül. Írjuk fel annak a pontnak a pályaegyenletét, amely ezen egyenes mentén állandó sebességgel mozog (kúpos csavarvonal).

14. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \sin t \cos t + \underline{j} a \sin^2 t + \underline{k} a \cos t$$

görbe egy origó középpontú, a sugarú gömbfelületre illeszkedik.

15. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos^3 t + \underline{j} a \sin^3 t + \underline{k} a \cos 2t$$

görbe egy asztroid vezérgörbéjü, z tengelyü hengerfelület véges darabján helyezkedik el.

16. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbének a koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit.

17. Írjuk fel az

$$\underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + t^2 \underline{k}$$

térgörbe érintőjének egyenletrendszerét a $t = 1$ paraméterű pontjában.

18. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(t - \sin t) + \underline{j} a(1 - \cos t) + \underline{k} 4a \sin \frac{t}{2}$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintőjének egyenletrendszerét. Mekkora szöget zár be ez az érintő a z tengellyel?

19. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4} \underline{i} + \frac{t^3}{3} \underline{j} + \frac{t^2}{2} \underline{k}$$

térgörbe azon érintőit, amelyek párhuzamosak az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletű síkkal.

20. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3) \underline{i} + 3t^2 \underline{j} + (3t + t^3) \underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos a $3x + y + z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

21. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben a hengeres csavarvonal érintői az xy koordinátasíkot metszik (lásd a 11. feladatot!).

22. Milyen görbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k}$$

görbe érintőinek az xy koordinátasíkkal való metszéspontjai?

23. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t - \underline{j} a \sin t + \underline{k} b e^t$$

görbe érintői az xy koordinátasíkot metszik.

24. Irjuk fel azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(\sin t + \cos t) + \underline{j} a(\sin t - \cos t) + \underline{k} b e^{-t}$$

görbe érintői az xy koordinátasíkot metszik.

25. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t + \underline{j} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t + \underline{k} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

görbe illeszkedik az

$$x^2 + y^2 = z^2$$

kúpfelületre és annak minden alkotóját 45° -os szögben metszi. (Ezt a görbét kúpos spirálisnak nevezik.)

26. Határozzuk meg a Viviani-féle görbe érintőinek az őt tartalmazó hengerfelület alkotóival bezárt legkisebb szögét. (lásd a 42. feladatot!).

27. Irjuk fel az $x^2 + y^2 - 8 = 0$ és az $xy - z + 2 = 0$ felületek metszésvonalának érintővektorát a $P(2, 2, 6)$ pontban.

28. Irjuk fel a $z^2 + 2x - y^2 = 0$, $3x + y - z = 0$ egyenletrendszerrel adott görbe $P(0, 1, 1)$ pontjában az érintőegyenest egyenletrendszerét.

Ivhossz

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai köré eső darabjának ivhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}| dt.$$

29. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab} t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$$

térgörbe $0 \leq t \leq 1$ szakaszának az ivhosszát.

30. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} b t$$

hengeres csavarvonal tetszőleges pontja és a $t = 0$ paraméterű pontja közé eső darabjának az ivhosszát.

31. Irjuk fel a hengeres csavarvonal paraméteres egyenletrendszerét, ha az ivhosszat választjuk paraméternek.

32. Irjuk fel a kör paraméteres egyenletét úgy, hogy az ívhossz legyen a paraméter.

33. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i} \sin \frac{s}{3} + \underline{j} \cos \frac{s}{3} + \underline{k} \frac{\sqrt{8}}{3} s$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

34. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i} \frac{s}{\sqrt{3}} \cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{j} \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{k} \frac{s}{\sqrt{3}}$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

35. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} \operatorname{ch} t$$

térgörbe egyenletét a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz függvényében.

36. Irjuk fel a körevolvens egyenletét természetes paraméterezésben (lásd a 3. feladatot!).

Kisérő triéder

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe kísérő triéderének élvektorai az érintő, a főnormális és a binormális egységvektor, amelyek a következőképpen számíthatók ki:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}, \quad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|}, \quad \underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}.$$

A kísérő triéder síkjai áthaladnak a görbe adott pontján. A simulásík normálisa párhuzamos az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$, a normálisík az $\dot{\underline{r}}$, a rektifikáló síké pedig az $(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}$ vektorral, és ezen vektorok ismeretében a síkok egyenlete felírható.

37. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2 \underline{i} + (2t + 3) \underline{j} + 3t^3 \underline{k}$$

térgörbe kísérő triéderének élvektorait és síkjainak egyen-

letét a görbe $t = -1$ paraméterű pontjában.

38. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t \sin t + \underline{j} t \cos t + \underline{k} t e^t$$

görbe kísérő triéderének élvektorait a koordinátarendszer kezdőpontjában.

39. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} t \cos t - \underline{j} t \sin t + \underline{k} t$$

görbe simulósíkjának az egyenletét a $t = 0$ paraméterű pontjában.

40. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{t^3}{3}\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában a kísérő triéder síkjainak egyenletét.

41. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + e^t\underline{k}$$

térgörbe $t = 0$ paraméterű pontjában a kísérő triéder éle-
gyeneseseinek egyenletrendszerét.

42. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{2}{t}\underline{i} + \ln t \underline{j} + t^2\underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a binormális párhuzamos az $x - y + 8z + 2 = 0$ egyenletű síkkal.

43. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^2 t + \underline{j} \frac{1}{2} \sin 2t + \underline{k} \cos t$$

görbe $t = 0$ paraméterű pontjához tartozó simulósíkjának az origótól mért távolságát.

44. Bizonyítsuk be, hogy a hengeres csavarvonal kísérő triéderének élvektorai a csavarvonal tengelyével állandó szöget alkotnak (lásd a 11. feladatot!).

45. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$$

egyenletű kúpos spirális kíséző triéderének élvektorai állandó szöget zárnak be a z tengellyel.

46. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 2t)\underline{i} + (3t - 5)\underline{j} - (t^2 + 2)\underline{k}$$

függvény síkgörbét állít elő, és írjuk fel a görbe síkjának egyenletét!

47. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \frac{1+t}{1-t} \underline{i} + \frac{1}{1-t^2} \underline{j} + \frac{t}{1+t} \underline{k}$$

függvénnyel előállított görbe síkgörbe, és írjuk fel a síkjának egyenletét!

48. Mutassuk meg, hogy a Viviani-féle görbe normálsíkjai áthaladnak a görbét tartalmazó gömb középpontján (lásd a 42. feladatot!).

49. A hengeres csavarvonal főnormálisaira állandó hosszúságú szakaszokat mérünk fel. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a szakaszoknak a végpontjai egy másik hengeres csavarvonalon helyezkednek el (lásd a 44. feladatot!).

50. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbe $O(0,0,0)$ pontbeli $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ vektorai egybeesnek a koordinátatengelyek egységvektoraival. Írjuk fel a görbének az O pontbeli kíséző triéder síkjaira eső merőleges vetületeinek egyenletét.

51. Írjuk fel az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ és az $x^2 - y^2 = 3$ felületek metszésvonalaként adódó görbe simulósíkjának az egyenletét az $M(2,1,2)$ pontban.

52. Írjuk fel az $x = y^2$ és $x^2 = z$ felületek metszésvonalának $M(1,1,1)$ pontjában a főnormális és a binormális egye-

nesek egyenletrendszerét.

Görbület, torzió, Frenet képletek

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe görbülete
a $G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$ képlettel, a torziója pedig a $T = \frac{\ddot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2}$

képlettel számítható ki.

A Frenet képletek a következők:

$$\underline{t}' = G\underline{n},$$

$$\underline{n}' = -T\underline{t} + G\underline{b},$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n},$$

ahol a vessző a természetes paraméter (ív hossz) szerinti deriválást jelöli.

53-57. Számítsuk ki az alábbi görbék görbületét és torzióját a megadott pontban:

$$53. \quad \underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}, \\ t = 1.$$

$$54. \quad \underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \ln t \underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 1.$$

$$55. \quad \underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2}t \underline{k}, \quad t = 0.$$

$$56. \quad \underline{r}(t) = \underline{i} t \cos t + \underline{j} t \sin t + \underline{k} at, \quad t = 0.$$

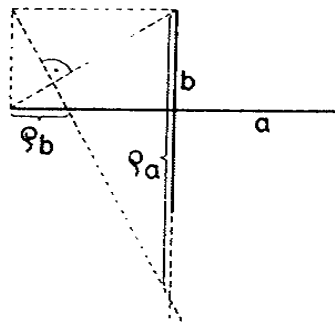
$$57. \quad \underline{r}(t) = \underline{i} \sin 2t + \underline{j}(1 - \cos 2t) + \underline{k} 2 \cos t, \\ t = \frac{\pi}{2}.$$

58. Mutassuk meg, hogy az $y = f(x)$ függvénnyel adott görbe görbülete

$$G = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

képlettel számítható minden olyan pontban, amelynek környezetében a függvény kétszer folytonosan differenciálható.

59. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ parabola görbületét a csúcspontjában.



60. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis nagy- és kistengelyének végpontjában a görbületi sugarak az alábbi ábra szerint szerkeszthetők:

61. Számítsuk ki a hengeres csavarvonal görbületét és torzióját a görbe tetszőleges pontjában (lásd a 42. feladatot!).

62. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3) \underline{i} + 3t^2 \underline{j} + (3t + t^3) \underline{k}$$

görbe görbülete és torziója tetszőleges paraméterértékre egymással egyenlő.

63. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^3 t + \underline{j} \sin^3 t + \underline{k} \cos 2t$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbületnek lokális minimuma van.

64. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a(t - \sin t) + \underline{j} a(1 - \cos t) + \underline{k} 4a \cos \frac{t}{2}$$

görbe görbületi sugarának lokális minimuma van.

65. Határozzuk meg a Viviani-féle görbének azokat a

pontjait, amelyekben a görbületének szélsőértéke van (lásd a 42. feladatot!).

66. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{t} \underline{i} + t^2 \underline{j} + (2 + t^2) \underline{k}$$

térgörbe görbületi középpontját a $t = 1$ paraméterű pontban.

67-69. Irjuk fel az alábbi térgörbék tetszőleges pontjaihoz tartozó görbületi középpontok helyvektorát:

67. $\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} b t$

hengeres csavarvonal.

68. $\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$

kúpos spirális.

69. $\underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2}t \underline{k}$.

70. Bizonyítsuk be, hogy a ciklois görbületi középpontjai az eredetivel egybevágó cikloist alkotnak (lásd az 4. feladatot!).

71. Számítsuk ki az $x^2 - 3y^2 - z = 0$ felület és az $x + y + z - 4 = 0$ sík metszésvonalának görbületét a $P(2, 1, 1)$ pontban.

72. Számítsuk ki az $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ és az $y^2 - 2x + z = 0$ felületek metszésvonalának görbületét és torzióját a $P(1, 1, 1)$ pontban.

73. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \operatorname{ch} t + \underline{j} a \operatorname{sh} t + \underline{k} at$$

görbe természetes egyenleteit.

74. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(2t - \sin 2t) + \underline{j} \cos 2t + \underline{k} 4 \sin t$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjában a $\underline{t}'$, $\underline{n}'$, $\underline{b}'$ vektorokat.

75. Írjuk fel a Frenet-képleteket az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^2}{2} \underline{i} + \frac{2t^3}{3} \underline{j} + \frac{t^4}{4} \underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában.

76. Írjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ pontjában a Darboux-féle vektort.

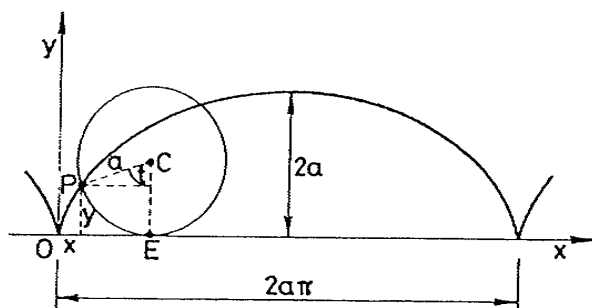
77. Bizonyítsuk be, hogy ha a térgörbét az $\underline{r}(s)$ ív-hossz szerint paraméterezett vektor-skalár függvény határozza meg, akkor a görbe tetszőleges pontjában teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\underline{r}' \cdot \underline{r}''' = -G^2,$$

$$\underline{t} \underline{b} \underline{b}' = T,$$

$$\underline{r}'' \cdot \underline{r}''' = G \cdot G'.$$

A FELADATOK MEGOLDÁSAI



1.

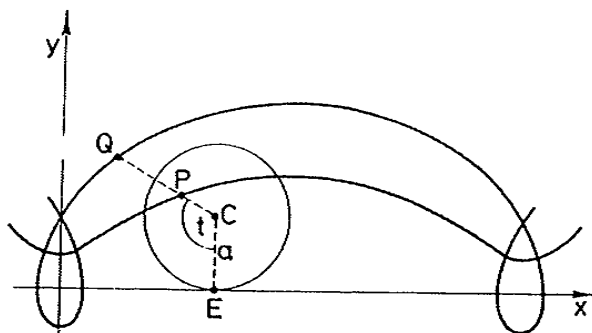
1. Válasszuk x-tengelynek a rögzített egyenest, és tegyük fel, hogy a P pont a koordinátarendszer kezdőpontjából indul. Vegyük észre, hogy az OE szakasz hossza megegyezik a P

és E pontok közötti körív hosszával. A görbe P futó pontjának koordinátáit az 1. ábra segítségével írjuk fel:

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

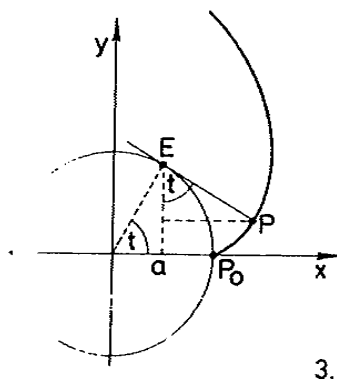
2. $d < a$ esetén P, $d > a$ esetén pedig Q jelöli a görbe futó pontját (2. ábra).



2.

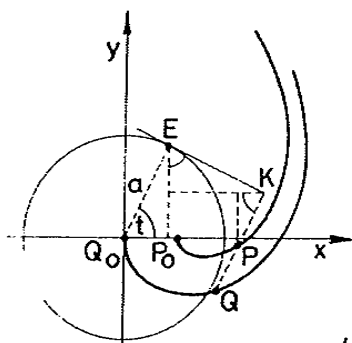
$$x = at - d \sin t,$$

$$y = a - d \cos t.$$



3.

3. Legyen a koordinátarendszer kezdőpontja a kör középpontjában és tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul. Használjuk fel, hogy $EP = \widehat{EP}_0 = at$ (3. ábra), ekkor $x = a(\cos t + t \sin t)$,
 $y = a(\sin t - t \cos t)$.



4.

4. Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a kör középpontjába (4. ábra). Az E és K pontoknál megjelölt szögek megegyeznek a t szöggel, $KP = d$ és az EK érintőszakasz hossza at . A P pont koordinátái:

$$x = (a - d)\cos t + at \sin t,$$

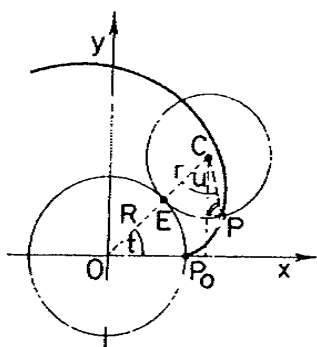
$$y = (a - d)\sin t - at \cos t.$$

$d = a$ esetén a Q pont pályája

arkhimedeszi spirális, amelynek egyenlete $x = at \sin t$,

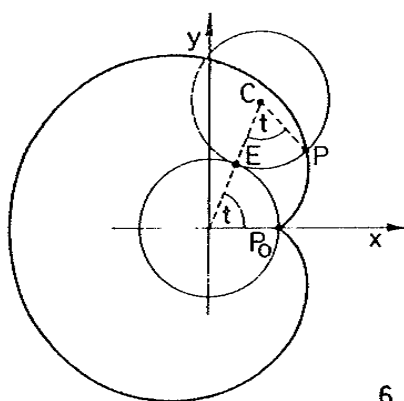
$$y = -at \cos t.$$

Olyan polárkoordinátarendszerben pedig, amelynek tengelye $a - y$ tengely, $r(\varphi) = a\varphi$ adódik.

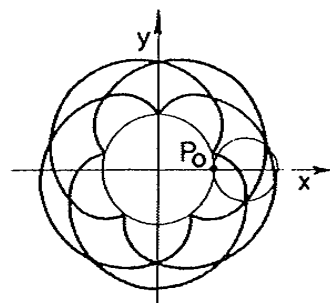


5.

5. A koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük a mozdulatlan kör középpontjába. Tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul ki, amely a kiindulási helyzetben egybeesik a két kör érintkezési pontjával (5. ábra). Mivel $\widehat{EP}_0 = \widehat{EP}$, azaz $Rt = r \cdot u$, $u = \frac{R}{r}t$.
A P csúcspontú megjelölt szög



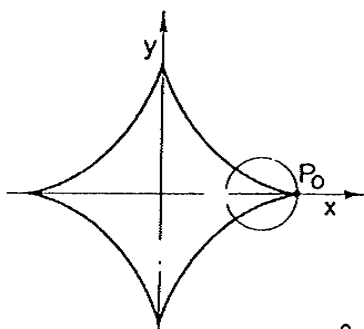
6.



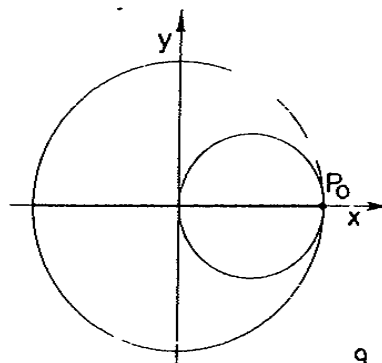
7.

$\pi - (t + u) = \pi - \frac{R+r}{r}t$, ezért a P pont koordinátái a következők: $x = (R+r)\cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t$, $y = (R+r)\sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t$. $r = R$ esetén kardioidot kapunk (6. ábra).

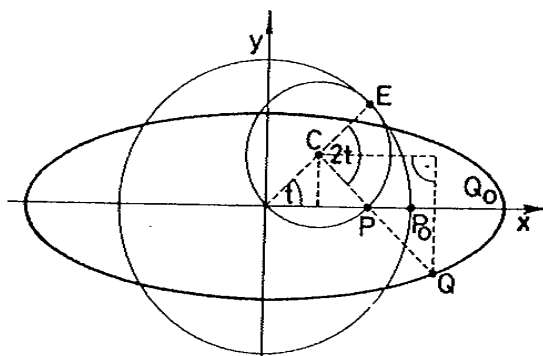
6. $x = (R-r)\cos t + r \cos \frac{R-r}{r}t$, $y = (R-r)\sin t - r \sin \frac{R-r}{r}t$. $R = 4r$ esetén asztroidot kapunk (8. ábra), $R = 2r$ esetén egyenes szakaszt (9. ábra).



8.



9



7. Tegyük fel, hogy a Q pont a Q_0 ponttól indul és $CQ = d$ állandó (10. ábra). A P kerületi pont t tetszőleges értékére az x tengelyen van (lásd a 6. feladatot), ezért Q koordinátái:

$$x = (r + d)\cos t \quad \text{és} \\ y = (r - d)\sin t.$$

10.

8. Egy rögzített t_0 pontban a ciklois érintőjének irányvektora $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{i}} a(1 - \cos t_0) + \dot{\mathbf{j}} a \sin t_0$. A normális egyenes egyenlete:

$$a(1 - \cos t_0) [X - a(t_0 - \sin t_0)] + a \sin t_0 [Y - a(1 - \cos t_0)] = 0,$$

amelyet az $E(at_0, 0)$ pont (4. ábra) valóban kielégít. Az érintőre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

9. A normális egyenletének Hesse-féle normálalakja

$$Y \sin t + X \cos t - a = 0.$$

A normálisnak az origótól mért távolsága minden t -re a .

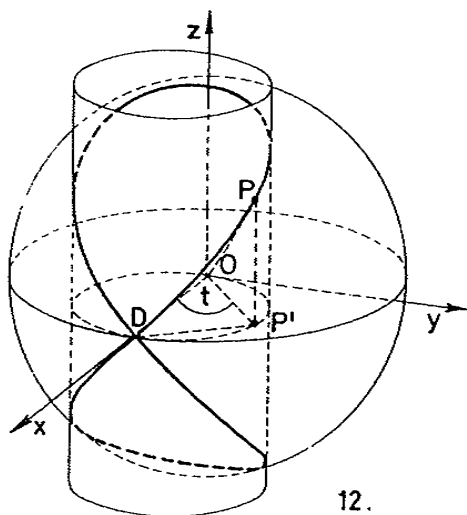
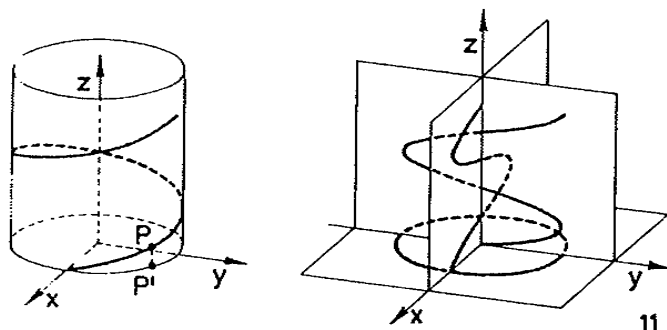
10. Megjegyzés: A 6. feladat megoldásaként felírt egyenletrendszerbe $R = 4r = a$ helyettesítés után trigonometrikus azonosságok felhasználásával az itt felírt egyenletrendszert kapjuk.

11. $\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} bt$ (11. ábra).

A vetületek: $x^2 + y^2 = a^2$;

$$y = a \sin \frac{z}{b};$$

$$x = a \cos \frac{z}{b}.$$



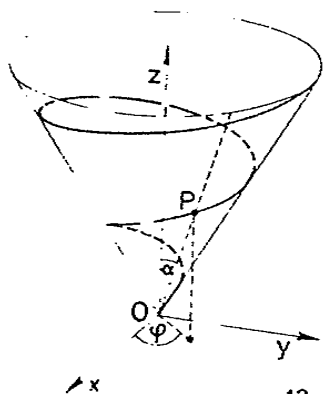
12. Ha a koordinátarendszert a 12. ábrán látható módon választjuk, a görbe egyenletrendszere $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $x^2 + y^2 - Rx = 0$. Válasszuk paraméternek azt a t szöget, amelyet a P pont xy koordinátasíkra eső merőleges vetületének helyvektora a pozitív x tengellyel zár be. Mivel DOP' és POP' egybevágó derékszögű háromszögek, POP'

szög megegyezik a t szöggel. A P pont koordinátái tehát

$$x = R \cos^2 t, \quad y = R \cos t \sin t, \quad z = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

A P pont akkor illeszkedik a D csúcspontú, z tengellyel párhuzamos tengelyű kúpfelületre, ha a $\vec{DP}$ vektornak a $\underline{k}$ egységvektorral alkotott hajlásszöge állandó. Ez pedig teljesül

$$(\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}).$$



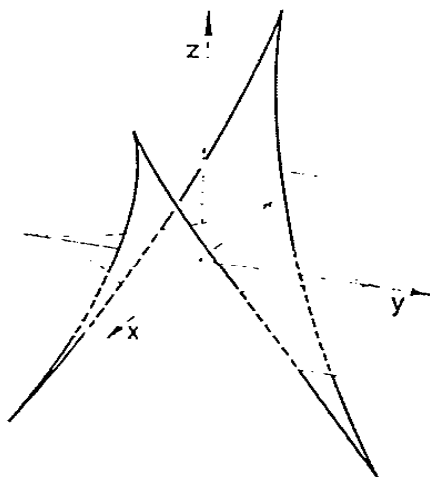
13.

13. Az egyenesnek a z tengellyel bezárt szöge legyen α . (13. ábra) A P pontnak az origótól mért távolságára $r = c\tau$, az xy síkra eső merőleges vetületére pedig $\varphi = \omega\tau$ teljesül, ahol c az egyenes menti egyenletes mozgás sebessége, ω pedig a z tengely körüli egyenletes forgómozgás szögsebessége. A P pont koordinátái tehát $x = c\tau \sin\alpha \cos\omega\tau$, $y = c\tau \sin\alpha \sin\omega\tau$, $z = c\tau \cos\alpha$. Az $a = \frac{c}{\omega} \sin\alpha$ és $b = \frac{c}{\omega} \cos\alpha$ állandók és a $t = \omega\tau$ paraméter bevezetése után a görbét leíró vektor-skalár függvény:

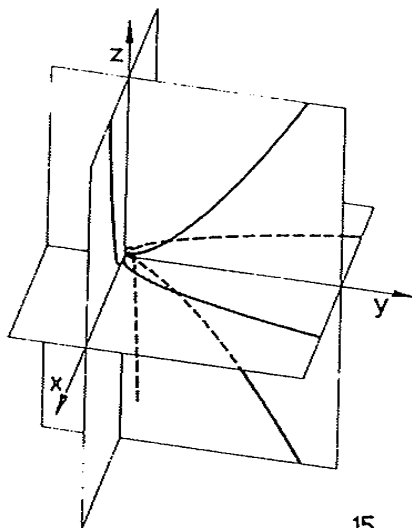
$$\underline{r}(t) = \underline{i} at \cos t + \underline{j} at \sin t + \underline{k} bt.$$

14. A görbe tetszőleges pontja kielégíti az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ egyenletet.

15. A görbe tetszőleges pontjának az xy síkra eső merőleges vetülete illeszkedik az $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ egyenletrendszerű asztroidra és $-a \leq z \leq a$ is teljesül.

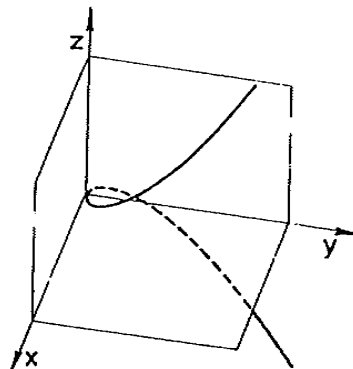


14.



15.

$$16. \begin{aligned} y &= x^2, z = 0; \\ z &= x^3, y = 0; \\ z^2 &= y^3, x = 0. \end{aligned}$$



17. A görbe érintővektora

$$\dot{\underline{r}}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j} + 2t \underline{k},$$

az adott helyen

$$\dot{\underline{r}}(1) = e \underline{i} - \frac{1}{e} \underline{j} + 2 \underline{k}.$$

Az érintő áthalad az

$$\underline{r}(1) = e \underline{i} + \frac{1}{e} \underline{j} + \underline{k}$$

helyvektorú ponton, egyenletrendszere tehát

$$\frac{x - e}{e} = 1 - ey = \frac{z - 1}{2}.$$

$$18. x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} z; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

19. A reltétel szerint a görbe érintővektora merőleges a sík normálvektorára, azaz $\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{n} = 0$, ahol

$$\underline{n} = \underline{i} + 3 \underline{j} + 2 \underline{k}$$

a sík normálvektora. Ezért $t^3 + 3t^2 + 2t = 0$.

Innen $t_1 = -1$, $t_2 = -2$ ($t = 0$ esetén a derivált zérus vektor). A megfelelő érintőegyeneselek egyenletrendszerei:

$$\frac{1}{4} - x = y + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - z, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{x - 4}{-8} = \frac{y + \frac{8}{3}}{4} = \frac{z - 2}{-2}.$$

20. $P_1(-2, 12, 14), P_2(-4, 3, -4).$

21. A csavarvonal tetszőleges t paraméterű pontjához tartozó érintő egyenletrendszere

$$X = a \cos t - a \tau \sin t$$

$$Y = a \sin t + a \tau \cos t$$

$$Z = bt + b\tau.$$

A $Z = 0$ feltételből $\tau = -t$ adódik, az érintőnek az xy síkkal alkotott M metszéspontjára tehát

$$X_0 = a \cos t + a t \sin t,$$

$$Y_0 = a \sin t - a t \cos t,$$

$$Z_0 = 0$$

teljesül. Ha a pont végigfut a csavarvonalon, a megfelelő M pontok körevolvenst irnak le (lásd a 3. feladatot!).

22. Az érintők az xy síkot az $y = \frac{3}{4} x^2$ parabola pontjaiban metszik.

23. $x^2 + y^2 = 2a^2.$

24. $x^2 + y^2 = 4a^2.$

25. A görbe tetszőleges pontja kielégíti a kúpfelület egyenletét. A görbe t paraméterű pontján áthaladó kúpalkotó irányvektora $\underline{r}(t)$, amelynek a pontbeli $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektorral alkotott γ szögére minden t paraméterértékre $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ teljesül.

26. Az érintővektor a görbe t paraméterű pontjában $\dot{\underline{r}}(t) = -\underline{i} R \sin 2t + \underline{j} R \cos 2t + \underline{k} R \cos t$, amelynek a z tengellyel párhuzamos hengeralkotóval bezárt szögére

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$$

adódik. A γ szög abszolút értéke akkor a legkisebb, ha a $\frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$ tört értéke a legnagyobb. Ez $\cos^2 t = 1$ esetén,

azaz $t = 0$ és $t = \pi$ értékre teljesül. Mindkét esetben a $D(R, 0, 0)$ pont adódik, amelyen a Viviani-féle görbe kétszer

halad át (lásd a 12. ábrát).

A $t = 0$ értékre $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adódik, ahonnan $\gamma = \pm \frac{\pi}{4}$,

a $t = \pi$ értékre pedig $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $\gamma = \pm \frac{3\pi}{4}$.

27. A $t = x$ paraméter választással a két felület metszészonalát $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény írja le, ahol $y(t)$ és $z(t)$ a két felület egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása. Az érintővektor $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$. Az $\dot{y}(t)$ és $\dot{z}(t)$ differenciáhányadosok kiszámításához deriváljuk mindkét egyenletet x szerint:

$$2x + 2y\dot{y} = 0$$

$$y + x\dot{y} - \dot{z} = 0.$$

Helyettesítsük be a P pont koordinátáit, ekkor a

$$4 + 4\dot{y} = 0$$

$$2 + 2\dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $\dot{y} = -1$, $\dot{z} = 0$, tehát az érintővektor az adott P pontban $\dot{\underline{r}} = \underline{i} - \underline{j}$.

28. A $t = x$ paraméterválasztás esetén az egyenletek x szerinti deriválásával a

$$2z\dot{z} + 2 - 2y\dot{y} = 0$$

$$3 + \dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek az adott pontban nincs megoldása, vagyis az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény az adott pontban nem deriválható.

Válasszuk most paraméternek a z változót és deriváljuk mindkét egyenletet z szerint. Ekkor a

$$2z + 2\dot{x} - 2y\dot{y} = 0$$

$$3\dot{x} + \dot{y} - 1 = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelyből az adott pontban $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ adódik. Mivel az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + t\underline{k}$ függvény deriváltja az $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \underline{k}$ vektor, a keresett érintővektor koordinátái $\dot{\underline{r}}(0, 1, 1)$.

Az érintőegyenest egyenletrendszere $x = 0$, $y = z$.

$$29. \dot{\underline{r}}(t) = a \underline{i} + 2\sqrt{3ab} t \underline{j} + 6bt^2 \underline{k}$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = a + 6bt^2$$

$$s = \int_0^1 (a + 6bt^2) dt = a + 2b.$$

$$30. s = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

$$34. \underline{r}(s) = \underline{i} a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{j} a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \\ + \underline{k} \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (lásd az előző feladatot!)}.$$

$$32. x = R \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{s}{R}.$$

33. Azt kell megmutatni, hogy

$$|\underline{r}'(s)| = \left| \frac{d\underline{r}}{ds} \right| \equiv 1 \text{ teljesül.}$$

34. Lásd az előző feladatot!

35. A görbe tetszőleges pontjának a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz-távolsága

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t} dt = \\ = \int_0^t \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t.$$

Az $s(t) = \operatorname{sh} t$ függvény inverze $t(s) = \operatorname{arsh} s$. Ha végrehajtjuk ezt a paramétertranszformációt, a görbének az

$\underline{r}(s) = \underline{i} \cos(\operatorname{arsh} s) + \underline{j} \sin(\operatorname{arsh} s) + \underline{k} \sqrt{1 + s^2}$ egyenletére jutunk.

$$36. R^2 = 2as.$$

37. Az érintő irányába mutató egységvektor

$$\underline{t} = -\frac{6}{11} \underline{i} + \frac{2}{11} \underline{j} + \frac{9}{11} \underline{k},$$

a főnormális $\underline{n} = -\frac{7}{\sqrt{11}} \underline{i} + \frac{6}{\sqrt{11}} \underline{j} - \frac{6}{\sqrt{11}} \underline{k}$,

a binormális $\underline{b} = -\frac{6}{\sqrt{11}} \underline{i} - \frac{9}{\sqrt{11}} \underline{j} - \frac{2}{\sqrt{11}} \underline{k}$.

A kísérő triéder síkjai áthaladnak az $\underline{r}(-1) = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$ helyvektorú ponton.

A simulósík egyenlete $6x + 9y + 2z - 24 = 0$, rektifikáló síké $7x - 6y + 6z + 3 = 0$, a normálsík pedig $6x - 2y - 9z - 43 = 0$.

$$38. \underline{t} = \frac{\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{2}}, \quad \underline{n} = \frac{2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{6}}, \quad \underline{b} = \frac{\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{3}}.$$

$$39. x - z = 0.$$

$$40. \text{A simulósík } x - 3z + 2 = 0, \text{ a rektifikáló sík } 3x - 10y + z + \frac{68}{3} = 0, \text{ a normálsík } 3x + y + z + \frac{2}{3} = 0.$$

$$41. \text{Az érintő } x = t, y = 0, z = 1 + t, \text{ a binormális } \frac{x}{-2} = -y = \frac{z-1}{2}, \text{ a főnormális } -x = \frac{y}{4} = z - 1.$$

$$42. A(1, \ln 2, -4).$$

$$\begin{aligned} 43. \underline{\dot{r}}(t) &= -\sin 2t \underline{i} + \cos 2t \underline{j} - \sin t \underline{k} \\ \underline{\ddot{r}}(t) &= -2\cos 2t \underline{i} - 2\sin 2t \underline{j} - \cos t \underline{k} \\ \underline{\dot{r}}(0) &= \underline{j} \\ \underline{\ddot{r}}(0) &= -2\underline{i} - \underline{k}. \end{aligned}$$

A simulósík Hesse-féle normálegyenlete:

$$-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2z}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

Az origó és a simulósík távolsága $|d| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

$$44. \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j} + b\underline{k}),$$

$$\underline{n} = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j},$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t \underline{i} - b \cos t \underline{j} + a \underline{k}).$$

A csavarvonal tengelyének irányvektora a $\underline{k}$ vektor.

$$\cos(\underline{t}, \underline{k}) * = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos(\underline{n}, \underline{k}) * = 0, \quad \cos(\underline{b}, \underline{k}) * = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$45. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\underline{i}(\cos t - \sin t) + \underline{j}(\sin t + \cos t) + \underline{k}],$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\underline{i}(\sin t + \cos t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)],$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} [\underline{i}(\sin t - \cos t) - \underline{j}(\sin t + \cos t) + 2\underline{k}].$$

$$\cos(\underline{t}, \underline{k}) * = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(\underline{n}, \underline{k}) * = 0, \quad \cos(\underline{b}, \underline{k}) * = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

46. Ha a görbe binormálisa állandó, akkor simulósíkja a görbe minden pontjában ugyanaz, tehát a görbe síkgörbe. A görbe síkjának normálvektora $\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} = -6\underline{i} - 4\underline{j} - 6\underline{k}$, egy pontja például az $\underline{r}(0) = -5\underline{j} - 2\underline{k}$ helyvektorú pont, az egyenlete tehát $3x + 2y + 3z + 16 = 0$.

47. A feladat megoldását úgy is elvégezhetjük, mint a 46. feladatét. Most más megoldást mutatunk. Válasszuk ki a görbe három tetszőleges pontját és írjuk fel a három pont által meghatározott sík egyenletét ($x - 4y - 2z + 3 = 0$). Ezután mutassuk meg, hogy a görbe tetszőleges t paraméterértékhez tartozó pontja kielégíti ennek a síknak az egyenletét.

Megjegyzés: Egy görbéről úgy is beláthatjuk, hogy síkgörbe, hogy kiszámítjuk a torzióját a t paraméterű tetszőleges pontjában. Ha az eredmény zérus, a görbe síkgörbe.

48. Írjuk fel a görbe t paraméterű pontjában a normális egyenletét (az érintővektort lásd a 26. feladat megoldásában) és igazoljuk, hogy az $O(0,0,0)$ pont kielégíti ezt az egyenletet.

49. A főnormális egységvektor

$$\underline{n} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Ha a felmért szakaszok hossza λ , akkor a végpontok a

$\underline{q}(t) = (a - \lambda)\cos t \underline{i} + (a - \lambda)\sin t \underline{j} + btk$
vektor-skálár függvény által leírt hengeres csavarvonalon
helyezkednek el.

50. $\underline{t} = \underline{i}$, $\underline{n} = \underline{j}$, $\underline{b} = \underline{k}$.

A vetületek egyenletét lásd a 46. feladat megoldásánál!

51. $4x - y + z - 9 = 0$.

52. A főnormális egyenletrendszere $\frac{x-1}{34} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$,
a binormálisé $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

53. $\underline{\dot{r}}(t) = 2t\underline{i} + \underline{j} + (3t^2 - 1)\underline{k}$

$\underline{\ddot{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{k}$

$\underline{\ddot{\ddot{r}}}(t) = 6\underline{k}$

$\underline{\dot{r}}(1) = (2, 1, 2)$

$\underline{\ddot{r}}(1) = (2, 0, 6)$

$\underline{\ddot{\ddot{r}}}(1) = (0, 0, 6)$

$\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} = (6, -8, -2)$

$G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, $T = \frac{-3}{26}$.

54. $G = \frac{2}{9}$, $T = \frac{-2}{9}$.

55. $G = -T = \frac{1}{2}$.

56. $G = \frac{2}{a^2 + 1}$, $T = \frac{3a}{2(a^2 + 1)}$.

57. $G = \frac{1}{2}$, $T = -\frac{3}{8}$.

58. Utmutatás: Állítsuk elő a görbét a $t = x$ paraméter
választással az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j}$ vektor-skálár függvénnyel

és helyettesítsünk a $G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$ képletbe.

$$59. G = \frac{1}{p}.$$

60. Az ellipszis paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} b \sin t.$$

A görbület a nagytengely végpontjában $G(0) = \frac{b}{a^2}$, a kistengely végpontjában pedig $G(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{b^2}$, amiből az ábrán látható szerkesztési eljárás közvetlenül adódik.

$$61. G = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad T = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

$$62. G = T = \frac{1}{3(t^2 + 1)^{3/2}}.$$

63. A keresett pontok a $t = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) paraméterértékeknek felelnek meg. (A görbét lásd a 14. ábrán).

64. A keresett pontok a $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) paraméterértékeknek felelnek meg.

65. A görbület a görbe futópontjában

$$G(t) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{5 + 3 \cos^2 t}{(1 + \cos^2 t)^3}}.$$

Mivel a $G^2(t)$ függvénynek ugyanott van lokális szélsőértéke, mint a $G(t)$ függvénynek, a

$$\frac{dG^2(t)}{dt}$$

differenciálhányadost készítjük el, amelynek számlálójában $3(1 + \cos^2 t)^2(4 + 2\cos^2 t) \sin 2t$ áll, a nevezője pedig mindig pozitív.

A $\frac{dG^2(t)}{dt}$ zérushelyei $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ($0 \leq t < 2\pi$) és ezeken a helyeken előjelet is vált. A görbületnek tehát a $D(R, 0, 0)$ pontban lokális minimuma, a $(0, 0^{\pm}R)$ pontokban pedig lokális maximuma van.

66. Az adott pontban a főnormális egységvektor

$$\underline{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}), \text{ a görbület } G = \frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

A görbületi középpont helyvektora

$$\begin{aligned} \underline{\rho} &= \underline{r}(1) + \frac{1}{G} \underline{n} = \underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} (4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \\ &= 4\underline{i} + \frac{7}{4} \underline{j} + \frac{15}{4} \underline{k}. \end{aligned}$$

67. Használjuk fel a 39. feladat megoldását

$$\lambda = \frac{1}{G} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

helyettesítéssel (lásd az 57. feladatot!).

68. A főnormális egységvektor a görbe futópontjában

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\underline{i}(\cos t + \sin t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)],$$

a görbület $G = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$, tehát a görbületi középpontok a

$$\begin{aligned} \underline{\rho}(t) &= -e^t \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{2} \sin t \right) \underline{i} + e^t \left(\frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \right) \underline{j} + \\ &\quad + e^t \underline{k} \end{aligned}$$

egyenletű görbén helyezkednek el.

69. A főnormális egységvektor

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \frac{1}{(e^t + e^{-t})^2} [\sqrt{2}(e^t + e^{-t}) \underline{i} + \sqrt{2}(e^t + e^{-t}) \underline{j} + \\ &\quad + (e^{-2t} - e^{2t}) \underline{k}], \end{aligned}$$

a görbület

$$G = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

A görbületi középpontok helyvektora tehát

$$\underline{\rho}(t) = (2e^t + e^{-t}) \underline{i} + (e^t + 2e^{-t}) \underline{j} + \sqrt{2} \left(t - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \right) \underline{k}.$$

70. A cikloist előállító függvény

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a (t - \sin t) + \underline{j} a (1 - \cos t).$$

A t paraméterű pontban a görbület

$$G = \frac{1}{a \sqrt{2(1 - \cos t)}}, \text{ a főnormális}$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} (\underline{i} \sin t - \underline{j}(1 - \cos t)).$$

A görbületi középpontok által alkotott görbét tehát a

$$\underline{\rho}(t) = \underline{r}(t) + \frac{1}{G} \underline{n}(t) = \underline{i} a (t + \sin t) + \underline{j} a (-1 + \cos t)$$

állítja elő, amelyből $\tau = t - \pi$ helyettesítéssel

$$\underline{\rho}(t) = \underline{r}(t) + a \pi \underline{i} - 2a \underline{j} \text{ adódik, vagyis az eredetiből el-}$$

tolással keletkező ciklois.

71. Válasszuk paraméternek az x változót és deriváljuk x szerint mindkét egyenletet.

$$\text{Az első deriválás után a } 2x - 6\dot{y} - \dot{z} = 0$$

$$1 + \dot{y} + \dot{z} = 0,$$

$$\text{a második deriválás után a } 2 - 6\dot{y}^2 - 6\ddot{y} - \ddot{z} = 0$$

$$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk.

Az adott pontban az első egyenletrendszer megoldása

$$\dot{y} = 1, \dot{z} = -2, \text{ a másodiké pedig } \ddot{y} = -\frac{4}{5}, \ddot{z} = \frac{4}{5}.$$

Tehát a derivált vektorok koordinátái $\dot{\underline{r}}(1, 1, -2)$ és

$$\ddot{\underline{r}}(0, -\frac{4}{5}, \frac{4}{5}).$$

Innen a görbületre a $G = \frac{\sqrt{2}}{15}$ értéket kapjuk.

$$72. G = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad T = 1.$$

$$73. \text{ A görbe tetszőleges pontjában } G = T = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

A futópontnak a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz-távolsága

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{x}}| dt = \int_0^t \sqrt{2}a \operatorname{ch} t dt = \sqrt{2}a \operatorname{sh} t.$$

Az $s(t) = \sqrt{2}a \operatorname{sh} t$ függvény inverze $t = \operatorname{arsh} \frac{s}{a\sqrt{2}}$.

Ezt a paramétertranszformációt végrehajtva

$$G = T = \frac{a}{2a^2 + s^2}$$

adódik.

74. Helyettesítsük be a Frenet-formulákba az adott pontban kiszámított

$$\underline{t} = \underline{i}, \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{k}, \quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{k}$$

vektorokat és a $G = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $T = 0$ értékeket.

Igy $\underline{t}' = \frac{1}{4} \underline{j} - \frac{1}{4} \underline{k}$, $\underline{n}' = -\frac{\sqrt{2}}{4} \underline{i}$ és $\underline{b}' = \underline{0}$ adódik.

$$75. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, 1)$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1)$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

$$G = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad T = \frac{1}{3}$$

$$\underline{t}' = (-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6})$$

$$\underline{n}' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$$

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}).$$

76. A Darboux-féle vektor $\underline{d} = T\underline{t} + G\underline{b}$.

Mivel az adott pontban $\underline{t} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{26}} (3, -4, -1)$,

$$G = \frac{2\sqrt{26}}{27} \quad \text{és} \quad T = -\frac{3}{26}, \quad \underline{d} = (\frac{2}{9} - \frac{1}{13})\underline{i} - (\frac{8}{27} + \frac{1}{26})\underline{j} - (\frac{2}{27} + \frac{1}{13})\underline{k}.$$

Megjegyzés: A Darboux-féle vektor a görbén egységnyi sebességgel mozgó ponthoz tartozó kísérő triéder pillanatnyi szögsebességvektora és segítségével a Frenet-féle képletek a következő képpen írhatók:

$$\underline{t}' = \underline{d} \times \underline{t}, \quad \underline{n}' = \underline{d} \times \underline{n}, \quad \underline{b}' = \underline{d} \times \underline{b}.$$

77. A Frenet-képletek felhasználásával

$$\underline{r}''' = (\underline{G}\underline{n})' = \underline{G}'\underline{n} + \underline{G}\underline{n}' = \underline{G}'\underline{n} - \underline{G}^2\underline{t} + \underline{G}\underline{T}\underline{b}.$$

Ha ezt a vektort skalárisan megszorozzuk az $\underline{r}' = \underline{t}$ vektorral, az első állítást kapjuk.

Mivel $\underline{t}\underline{b}\underline{b}' = -\underline{T}\underline{t}\underline{b}\underline{n}$ és $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ jobbrendszert alkotnak, $\underline{t}\underline{b}\underline{n} = -1$.

Az $\underline{r}'''$ vektornak és az $\underline{r}'' = \underline{t}' = \underline{G}\underline{n}$ vektornak a skaláris szorzata valóban $\underline{G} \cdot \underline{G}'$.