

Felületek egyenletei, lefejtendő vonalfelületek

A vonalfelületet az $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$ vektoregyenlettel adhatjuk meg, ahol $\underline{r}(u)$ a vezérgörbe egyenlete, $\underline{l}(u)$ pedig az alkotóegyenestől irányvektora. A vonalfelületet lefejtendőnek nevezzük, ha mindegyik pontjában $\underline{r}' \cdot \underline{l} = 0$ teljesül, ahol

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{du} \quad \text{és} \quad \underline{l} = \frac{d\underline{l}}{du}.$$

78. Irjuk fel az $A(2, 3, 5)$, $B(4, 5, -6)$, $C(1, 3, 2)$ pontokra illeszkedő sík két paraméteres vektoregyenletét.

[79-81.] Irjuk fel a hengerfelület paraméteres egyenletrendszerét és implicit egyenletét, ha adott a vezérgörbéje és az alkotóegyeneseinek $\underline{a}$ irányvektora:

79. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 4 \cos^3 u \underline{i} + 4 \sin^3 u \underline{j}$,
 $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$.

80. vezérgörbe: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, $\underline{a} = \underline{k}$.

81. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{j} 2 \cos u + \underline{k} 3 \sin u$,
 $\underline{a} = \underline{i}$.

[82-84.] Irjuk fel a kúpfelület egyenletét paraméteres és implicit alakban, ha adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

82. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} \cos u + \underline{j} \sin u$, $C(0, 0, 1)$.

83. vezérgörbe: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $z = 0$, $C(2, 5, -3)$.

84. vezérgörbe: $z = x^2$, $y = -1$, $C(2, 3, -4)$.

[85-86.] Irjuk fel annak a kúpfelületnek a két-paraméteres vektoregyenletét, amelynek adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

85. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 2(\sin u - u \cos u)\underline{i} + 2(\cos u + u \sin u)\underline{k}$, $C(0, -8, 0)$.

86. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos^2 u + \underline{j} R \cos u \sin u + \underline{k} R \sin u$, $C(0, 0, 0)$.

[87-97.] Irjuk fel a forgásfelület egyenletét, ha adott a meridiángörbéje és a forgástengelye:

87. meridiángörbe az xz koordinátasíkban elhelyezkedő, $A(a, 0, 0)$ középpontú, b sugarú kör ($a > b > 0$), forgástengely a z tengely.

88. meridiángörbe az xz koordinátasíkban elhelyezkedő origó középpontú, R sugarú kör, forgástengely az x tengely.

89. meridiángörbe: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, $z = 0$, forgástengely az y tengely.

90. meridiángörbe: $2y - 3z = 7$, $x = 0$, forgástengely az y tengely.

91. meridiángörbe: $z = y^2 + 4$, $x = 0$, forgástengely a z tengely.

92. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}$, forgástengely az y tengely.

93. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i} 5\cos^3 u + \underline{k} 5\sin^3 u$, forgástengely a z tengely.

94. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a képzetes tengely.

95. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a valós tengely.

96. meridiángörbe: $z = \sin u$, forgástengely az y tengely.

97. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\underline{j}$, forgástengely az x tengely.

98. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + u^2\underline{j} + u^3\underline{k}$$

görbe érintőegyenesei által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét.

99. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos^2 u + \underline{j} R \cos u \sin u + \underline{k} R \sin u$$

egyenletű Viviani görbe érintőegyenesei által alkotott vonalfelület kétparaméteres vektoregyenletét.

100. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + b t \underline{k}$$

hengeres csavarvonal binormálisai által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét. Állapítsuk meg, hogy lefejtethető-e a kapott vonalfelület.

[101-106.] Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények milyen felületet határoznak meg és milyen görbék a paramétervonalak:

$$101. \underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + uv\underline{k}.$$

$$102. \underline{r}(u, v) = \underline{i} v \cos u + \underline{j} v \sin u + \underline{k} v.$$

$$103. \underline{r}(u, v) = \underline{i} v \cos u + \underline{j} v \sin u + \underline{k} u.$$

$$104. \underline{r}(u, v) = (u + \sin v)\underline{i} + (u + \cos v)\underline{j} + (u + a)\underline{k}.$$

$$105. \underline{r}(u, v) = \underline{i} a \cosh u \cos v + \underline{j} b \cosh u \sin v + \underline{k} c \sinh u, (a, b, c > 0).$$

$$406. \underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}u^2.$$

407. Bizonyítsuk be, hogy egy térgörbe érintőegyeneseiből álló vonalfelület lefejthető felület.

408. Bizonyítsuk be, hogy egy vonalfelület pontosan akkor lefejthető, ha minden érintősíkja egy-egy alkotóegyenese mentén érinti.

409. Bizonyítsuk be, hogy bármely lefejthető vonalfelület vagy hengerfelület, vagy kúpfelület, vagy egy térgörbe érintőegyeneseiből áll.

Felületi normális, érintősík

Az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$, az érintősík egyenlete pedig $(\underline{R} - \underline{r})\underline{r}_u \underline{r}_v = 0$, ahol $\underline{R}(X,Y,Z)$ a sík futó pontjának koordinátái.

$z = f(x,y)$ függvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m}(-p,-q,1)$, érintősíkjának egyenlete $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$, ahol

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ha a felületnek az $F(x,y,z) = 0$ alakú implicit egyenletét ismerjük, akkor a felületi normálist $\underline{m}(F'_x, F'_y, F'_z)$, az érintősík egyenletét pedig $(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0$ alakban írhatjuk fel.

410. Írjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (1+u)\cos v \underline{j} + (1+u)\sin v \underline{k}$$

felület $u = 1$, $v = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontján áthaladó paramétervonalainak egyenletét és számítsuk ki a paramétervonalak érintőinek hajlásszögét az adott pontban.

411. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + \cos u \sin v \underline{j} + \cos u \cos v \underline{k}$$

egyenletű felület $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{3}$ pontjában a paramétervonalainak érintői által bezárt szöget.

112. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (2u - v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 - v^3)\underline{k}$$

egyenletű felület $P(3,5,7)$ pontjában a paramétervonalak érintőegyeneseinek egyenletrendszerét.

113. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\underline{i} + 2uv \underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k}$$

egyenletű felület $u = 1, v = 2$ paraméterű pontjában a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét.

[114-124.] Irjuk fel az alábbi felületek megadott pontjában az érintősík egyenletét:

$$114. \underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k};$$

$$u = 1, v = -2.$$

$$115. \underline{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u)\underline{i} + (\sin u - v \cos u)\underline{j} + (u + v)\underline{k}; \quad u = 0, v = 1.$$

$$116. \underline{r}(u,v) = u^4\underline{i} + 3uv^2\underline{j} + v^3\underline{k}; \quad u = 2, v = 1.$$

$$117. \underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k};$$

$$u = 2, v = 2.$$

$$118. \underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (u^2 - 2v)\underline{j} + (u^3 - 3uv)\underline{k};$$

$$P(1,3,4).$$

$$119. xy^2 + z^3 = 12; \quad P(1,2,2).$$

$$120. z = x^3 + y^3; \quad P(1,2,9).$$

$$121. x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0; \quad P(3,1,-1).$$

$$122. x^2 + y^2 + z^2 = 169; \quad M(3,4,12).$$

$$123. \underline{r}(u,v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} av; \quad u = u_0,$$

$$v = v_0.$$

$$124. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad P(x_0, y_0, z_0).$$

125. Határozzuk meg az

$$r(u, v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv \underline{k}$$

felületnek az $x + 2y + 2z = 32$ síkkal párhuzamos érintősíkját.

126. Mutassuk meg, hogy a $xyz = a^3$ felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatú tetraéde-
reket alkotnak.

127. Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z - 3 = 0$ síkkal párhuzamos érintősíkjának az egyenletét.

128. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = a^{\frac{2}{3}}$$

felület érintősíkjai által a koordinátatengelyekből ki-
metszett szakaszok négyzetösszege állandó.

129. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

egyenletű felület érintősíkjai a koordinátatengelyek-
ből állandó összegű darabokat vágnak le.

130. Az $x^n + y^n + z^n = a^n$ egyenletű felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősík messe a koor-
dinátatengelyeket rendre az A, B, C pontokban.
Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x_0}{OA} + \frac{y_0}{OB} + \frac{z_0}{OC} = 1$$

teljesül, ahol O a koordinátarendszer kezdőpontja.

131. Bizonyítsuk be, hogy a csavarvonal érintő-
egyenesei által előállított vonalfelület normálisai a
z-tengellyel állandó szöget zárnak be.

432. Bizonyítsuk be, hogy a $z = \operatorname{tg} xy$ és az $x^2 - y^2 = a$ felületek érintősíkjai a két felület metszésvonalának pontjaiban merőlegesek egymásra.

Felületi görbék görbülete

Az $\underline{r}(u, v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel előállított felület normálmetszetéhez jutunk, ha az $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normálisra és az $\frac{\dot{u}}{v}$ hányadossal jellemzett $\underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$ érintőirányra illeszkedő normálsíkkal metsszük a felületet. A normálmetszet görbülete

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Ugyenerre az érintőirányra illeszkedő ferdemetszet görbülete

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{R_n},$$

ahol φ a ferdemetszet síkjának a normálmetszet síkjával alkotott hajlásszöge.

A képletekben szereplő Gauss-féle főmennyiségek a következők:

$$E = \underline{r}_u^2, \quad F = \underline{r}_u \underline{r}_v, \quad G = \underline{r}_v^2,$$

$$L = \underline{m}^0 \underline{r}_{uu}, \quad M = \underline{m}^0 \underline{r}_{uv}, \quad N = \underline{m}^0 \underline{r}_{vv},$$

ahol

$$\underline{m}^0 = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}.$$

433. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = e^u \underline{i} + e^v \underline{j} + (u - v) \underline{k}$$

felület $u = 0, v = 0$ paraméterű pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$

érintőirányra illeszkedő, a normálsíkkal $\varphi = 30^\circ$ -os szöget alkotó síkban fekvő ferdemetszet görbületét.

134. Adott a $z = 2x^2 + 4,5 y^2$ felület. Számítsuk ki a koordinátarendszer kezdőpontjában az x tengellyel 45° -os szöget bezáró érintőirányú normálmetszet görbületi sugarát.

135. Adott az

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2) \underline{i} + (u^2 - v^2) \underline{j} + uv \underline{k}$$

felületen a $P(u = 1, v = 1)$ pont. Számítsuk ki a P pontban az

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{1}{2}$$

hányadossal jellemzett érintőirányhoz tartozó normálmetszet görbületét.

136. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 - 2uv) \underline{i} + (u^2 v^2 - v^3) \underline{j} + (u^4 - 2v^2) \underline{k}$$

felület $u = 1, v = -1$ pontjában az $\dot{\underline{r}}(2, -1, z)$ érintővektorú normálmetszet görbületét.

137. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} \cosh u \cos v + \underline{j} \sinh u \sin v + \underline{k} \tanh u$$

felület $u = 0, v = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontján áthaladó, az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$ hányadossal és $\varphi = 45^\circ$ -os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

138. Számítsuk ki a $z = \sqrt{2xy}$ felület $P(2, 4, 4)$ pontján áthaladó, az $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 1$ hányadossal és $\varphi = 120^\circ$ -os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

139. Számítsuk ki a gömbfelület tetszőleges pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \lambda$ hányadossal jellemzett érintőirányú normálmetszetének és a $\varphi < 90^\circ$ -os szöggel jellemzett ferde metszetének görbületét.
(Lásd a 88. feladatot.)

Főgörbületek, főirányok

A felület adott pontján áthaladó normálmetszetek görbületeinek $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ szélsőértékeit (ha léteznek) a

pontbeli főgörbületeknek, azokat az érintőirányokat pedig, amelyekben ezek fellépnek, főirányoknak nevezzük. Az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ főirányok a

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből határozhatók meg. A főgörbületek szorzatát és összegét a

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

képletekkel számíthatjuk ki.

A felület gömbi pontján áthaladó összes normálmetszet görbülete egyenlő (és nem zérus), ezért $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$

és minden irány főirány. Az olyan pontot, amelyen áthaladó összes normálmetszet görbülete zérus, planáris pontnak nevezik.

140. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv \underline{k}$$

egyenletű felület $u = 1$, $v = 1$ paraméterű pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

141. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} u$$

kúp felület $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

142. Számítsuk ki a

$$z = x^3 - y^3$$

felület $P(2, -1, 9)$ pontjában az összeg- és szorzatgörbületet.

143. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i} \cos u + \underline{j} v + \underline{k} \sin u$$

hengerfelület tetszőleges pontjában a főirányok megegyeznek a paramétervonalak érintőirányával.

144. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + 2uv\underline{j} + (u - v)\underline{k}$$

felület $u = -1, v = -1$ paraméterű pontjában a főirányok a paramétervonalak szögfelezői. Írjuk fel a főirányokra illeszkedő normálmetszetek síkjainak (fősíkok) egyenletét.

145. Mutassuk meg, hogy a

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

egyenletű felületnek az $A(0,0,1)$ pontja gömbi pont.

146. Forgassuk meg az $y = \sin x$ görbét az x tengely körül és keressük meg az így előálló felület gömbi pontjait.

147. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} v$$

csavarfelület tetszőleges pontjában az összeggörbület zérus. Állapítsuk meg, hogy hogyan helyezkednek el azok a pontok, amelyekben a szorzatgörbület állandó.

148. Forgassuk meg az $y = \cosh x$ egyenletű láncgörbét az x tengely körül és mutassuk meg, hogy az így keletkező katencoid minden pontjában az összeggörbület zérus.

149. Forgassuk meg az $x = a \sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)$ egyenletrendszerű traktrixot a z tengely körül és számítsuk ki az így keletkező pszeudoszféra szorzatgörbületét a felület tetszőleges pontjában.

150. Keressük meg a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

hiperbolikus paraboloidnak azokat a pontjait, amelyekben az összeggörbület zérus.

Felületi pontok osztályozása

A felületnek azt a pontját, ahol $K > 0$, elliptikus pontnak, ahol $K < 0$, hiperbolikus pontnak és ahol $K = 0$, parabolikus pontnak nevezzük. K előjele megegyezik az $LN - M^2$ kifejezés előjelével, a $z = f(x, y)$ függvénnyel való megadás esetén pedig az

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

kvadratikus forma előjelével.

[151-153.] Határozzuk meg az alábbi felületek megadott pontjának típusát:

$$151. \underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2) \underline{j} + uv \underline{j} + \cos u \cos v \underline{k},$$

$$u = \frac{\pi}{2}, \quad v = 0.$$

$$152. \underline{r}(u, v) = e^u \underline{i} + e^v \underline{j} + (u - v) \underline{k},$$

$$u = 0, \quad v = 1.$$

$$153. z = 4x^2y - 2xy^2, \quad P(1, 0, 0).$$

[154-162.] Állapítsuk meg, hogy milyen jellegű pontjai vannak az alábbi felületeknek:

154. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\sin u)\sin v + \underline{k} b\sin u$, $(a > b > 0)$ tórusz.

155. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}(u^2 + 4)$
forgásparaboloid.

156. $\underline{r}(u,v) = (2\cos u + v)\underline{i} + (2\sin u + v)\underline{j} + v\underline{k}$
hengerfelület.

157. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}v$
csavarfelület.

158. $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid.

159. $xyz = 1$.

160. $z = e^{-(x^2 + y^2)}$.

161. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

162. $z = \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}$.

163. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + uv\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k}$
felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

164. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = v^3\underline{i} + u^2\underline{j} + (u + v)\underline{k}$
felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

MEGOLDÁSOK

78. A sík tetszőleges pontjának helyvektora

$$\underline{r}(u, v) = \vec{OA} + u \cdot \vec{AC} + v \cdot \vec{AB}$$

alakban állítható elő. Az adatok behelyettesítésével

$$\underline{r}(u, v) = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k} + u(-\underline{i} - 3\underline{k}) + v(2\underline{i} + 2\underline{j} - 4\underline{k})$$

adódik, rendezés után az

$$\underline{r}(u, v) = (2 - u + 2v)\underline{i} + (3 - 2v)\underline{j} + (5 - 3u - 4v)\underline{k}$$

egyenletet kapjuk.

79. A hengerfelület futó pontjának helyvektora

$\underline{r}(u, v) = \underline{r}_1(u) + v\underline{a}$ alakban állítható elő, ahol $\underline{r}_1(u)$ a vezérgörbe egyenlete (itt asztroid), $\underline{a}$ pedig az alkotó irányvektora. Eszerint az adott hengerfelület vektor-egyenlete a következő:

$$\underline{r}(u, v) = 4\cos^3 u \underline{i} + 4\sin^3 u \underline{j} + v(3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}), \text{ vagyis}$$

$$\underline{r}(u, v) = (4\cos^3 u + 3v)\underline{i} + (4\sin^3 u + 2v)\underline{j} + 4v\underline{k}.$$

$$\text{Ha az } x = 4\cos^3 u + 3v,$$

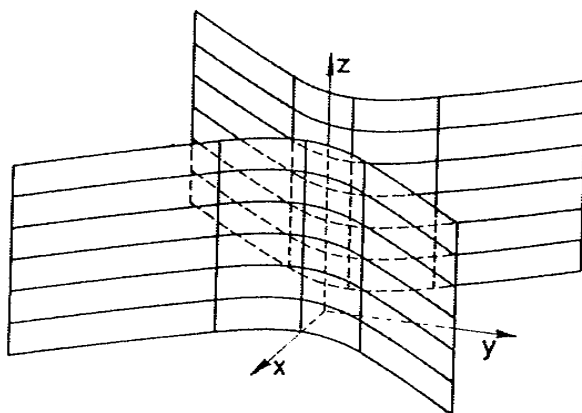
$$y = 4\sin^3 u + 2v,$$

$$z = 2v$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük az u és v paramétereket, a felület $(2x - 3z)^{2/3} + (2y - 2z)^{2/3} = 4$ alakú implicit egyenletét kapjuk.

$$-2 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq v \leq 3$$



16.

80. Az adott hiperbola paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}_1(u) = \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} \operatorname{sh} u.$$

A hengerfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} \operatorname{sh} u + \underline{k} v,$$

illetve

$$x^2 - y^2 = 1.$$

81. Az adott vezérgörbe ellipszis. A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u, v) = v \underline{i} + 2 \cos u \underline{j} + 3 \sin u \underline{k}$$

és

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

82. Ha $\underline{r}(u)$ a vezérgörbét leíró függvény, $\underline{c}$ pedig a csúcs helyvektora, akkor a kúpfelület tetszőleges pontjába mutató vektor

$$\underline{r}(u, v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c}).$$

Az adatok behelyettesítésével

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} v \cos u + \underline{j} v \sin u + \underline{k}(1 - v)$$

adódik. $0 \leq v \leq 1$ értékeire a kúpfelületnek az adott egy-séggör és a csúcs közé eső darabját kapjuk.

Az implicit egyenlet $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$.

Megjegyzés: A kúpfelület vektoregyenlete az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v(\underline{c} - \underline{r}(u))$$

alakban is előállítható.

83. A vezérgörbe kör, amelynek paraméteres vektoregyenlete $\underline{r}(u) = 2\cos u \underline{i} + (2 + 2\sin u) \underline{j}$.

A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u, v) = (2 + 2v \cos u - 2v) \underline{i} + (5 + 2v \sin u - 3v) \underline{j} + (3 - 3v) \underline{k},$$

illetve

$$(3x - 2z)^2 + 9(y - 2 - z)^2 - 4(3 - z)^2 = 0.$$

84. Az adott parabola előállítható pl. az

$$\underline{r}(u) = u \underline{i} - \underline{j} + u^2 \underline{k}$$

vektoregyenlettel.

A kúpfelület egyenletei

$$\underline{r}(u, v) = (2 + uv - v) \underline{i} + (3 - 4v) \underline{j} + (-4 + u^2 v + 4v) \underline{k},$$

illetve

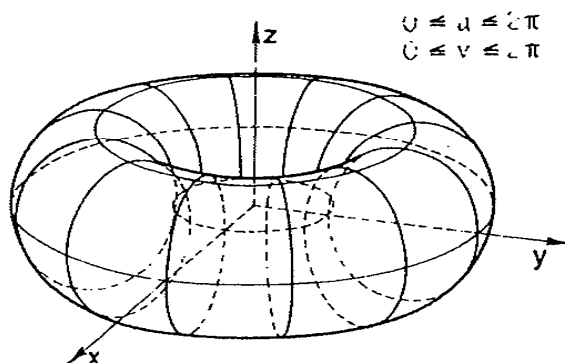
$$(2x - y - 1)^2 + (3 - y)^2 - (z + 4\sqrt{3 - y}) = 0.$$

85. A vezérgörbe körevolvens.

$$\underline{r}(u, v) = 2v(\sin u - u \cos u) \underline{i} + 8(v - 1) \underline{j} + 2v(\cos u + u \sin u) \underline{k}.$$

86. A vezérgörbe a Viviani görbe (lásd a 12. ábrát).

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R v \cos^2 u + \underline{j} R v \cos u \sin u + \underline{k} R v \sin u.$$



87. A meridián-görbe paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(u) = (a + b \cos u) \underline{i} + b \sin u \underline{k}.$$

Forgassuk a kört a z tengely körül po-

zitiv irányban és válasszuk v paraméternek a meridián-görbe síkjának az xz koordinátasíktól való elfordulásának szögét. Ekkor a keletkező tórusz vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi).$$

88. A megforgatott kör vektoregyenlete

$$\underline{r}(u) = \underline{i} R \cos u + \underline{k} R \sin u.$$

Ha v a pozitív irányban elforgatott kör síkjának az xz koordinátasíkkal bezárt szöge, akkor

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R \cos u + \underline{j} R \sin u \sin v + \underline{k} R \sin u \cos v \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi).$$

A paraméterek kiküszöbölésével a gömb ismert

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

egyenletét kapjuk.

89. A meridiángörbe az

$$\underline{r}(u) = (3 + 2 \cos u) \underline{i} + 2 \sin u \underline{j}$$

egyenletű kör. A keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + 2 \cos u) \cos v + \underline{j} 2 \sin u + \underline{k}(3 + 2 \cos u) \sin v \quad (0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi),$$

illetve

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 13)^2 + 36y^2 - 144 = 0.$$

90. Az adott egyenes paraméteres egyenletrendszere pl.

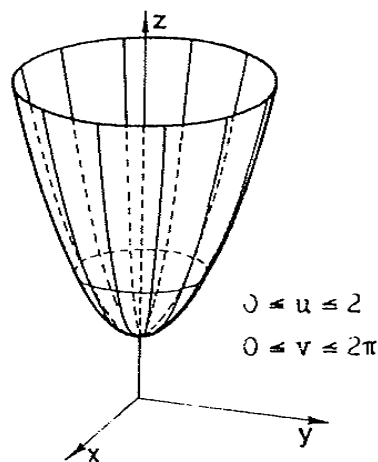
$$x = 0, \quad y = 3t + 2, \quad z = 2t - 1$$

A forgatással keletkező kúpfelület egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(2u - 1) \sin v + \underline{j}(3u + 2) + \underline{k}(2u - 1) \cos v,$$

ahol v a meridiánsíknak az yz koordinátasíktól mért elfordulási szöge. Ennek a kúpfelületnek az implicit egyenlete

$$9x^2 + 9z^2 - (2y - 7)^2 = 0.$$



18.

91. Az adott parabolát a tengelye körül forgatjuk meg, így forgásparaboloid keletkezik, amelynek egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}(u^2 + 4),$$

ahol v az elforgatott meridiángörbe síkjának az xz síkkal bezárt szöge. A felület implicit egyenlete

$$x^2 + y^2 = z - 4,$$

amelyhez közvetlenül is eljuthatunk. Legyen a forgásparaboloid tetszőleges pontja $P(X, Y, Z)$, amely az adott parabola $P'(0, y, z)$ pontjának a z tengely körüli elforgatásával keletkezik. A koordináták között a következő összefüggések írhatók fel: $X^2 + Y^2 = y^2$, $Z = z$.

Mivel $z = y^2 + 4$ teljesül, ezért a felület futó pontjának koordinátái az $X^2 + Y^2 = Z - 4$ egyenletet elégítik ki, amely éppen a felület fent felírt egyenlete.

92. A meridiángörbe kör, a keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + 2\cos u)\cos v + \underline{j}(4 + 2\sin u) + \underline{k}(3 + 2\cos u)\sin v.$$

93. A meridiángörbe asztroid, a felület egyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} 5\cos^3 u \cos v + \underline{j} 5\cos^3 u \sin v + \underline{k} 5 \sin^3 u,$$

illetve

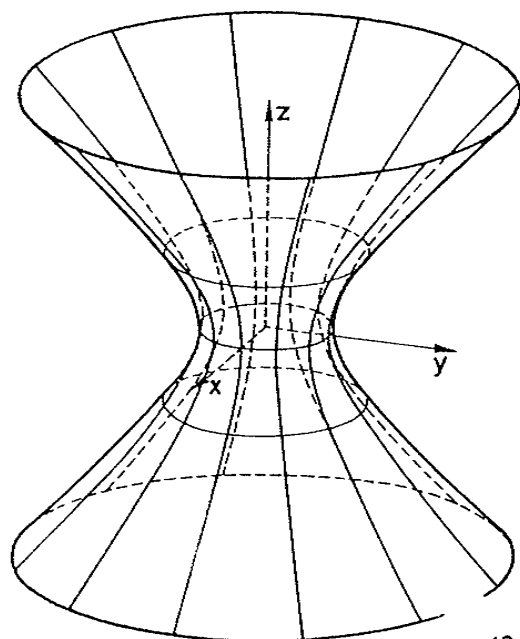
$$\left[\left(\frac{x}{5} \right)^2 + \left(\frac{y}{5} \right)^2 \right]^{1/3} + \left(\frac{z}{5} \right)^{2/3} = 1.$$

94. Legyen a meridiángörbe az xz koordinátesikban

$$\underline{r}(u) = \underline{i}a \cosh u + \underline{k}c \sinh u$$

és a forgástengely a z tengely.

A keletkező felület egykőpenyű forgáshiperboloid.



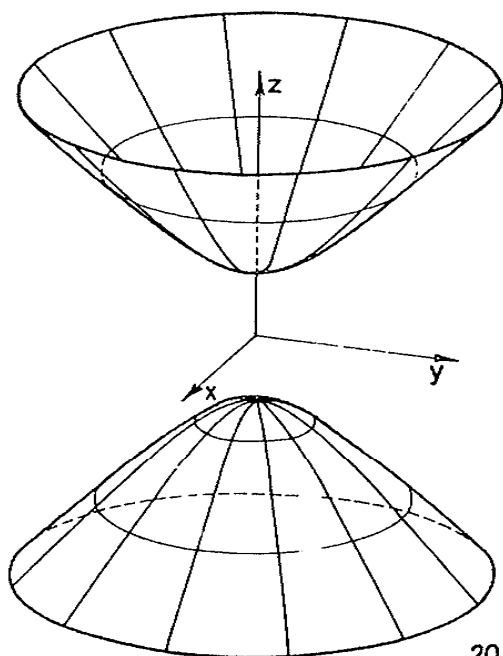
$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}a \cosh u \cos v + \underline{j}a \cosh u \sin v + \underline{k}c \sinh u,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$-2 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

19.



95. Legyen a meridián-görbe az xz koordináta-síkban $\underline{r}(u) = \underline{i}a \sinh u + \underline{k}c \cosh u$ és a forgástengely a z tengely. A keletkező felület kétköpenyű forgáshiperboloid.

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}a \sinh u \cos v + \underline{j}a \sinh u \sin v + \underline{k}c \cosh u,$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

$$-2 \leq u \leq 2, 4$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

20.

96. $\underline{r}(u,v) = \underline{i} \sin u \cos v + \underline{j} u + \underline{k} \sin u \sin v.$

97. A meridiángörbe kardioid (lásd a 6. ábrát).

$$\underline{r}(u,v) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\cos v \underline{j} + (2\sin u - \sin 2u)\sin v \underline{k}.$$

98. A felület futó pontjának helyvektora

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v \cdot \dot{\underline{r}}(u).$$

Igy

$$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + 2uv)\underline{j} + (u^3 + 3u^2v)\underline{k}.$$

99. $\underline{r}(u,v) = R(\cos^2 u - v \sin 2u)\underline{i} + R(\sin u \cos u + v \cos 2u)\underline{j} + R(\sin u + v \cos u)\underline{k}.$

100. $\underline{r}(u,v) = (a \cos u + vb \sin u)\underline{i} + (a \sin u - vb \cos u)\underline{j} + (bu + av)\underline{k}.$

Megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$\dot{\underline{r}}\dot{\underline{r}} = 0$$

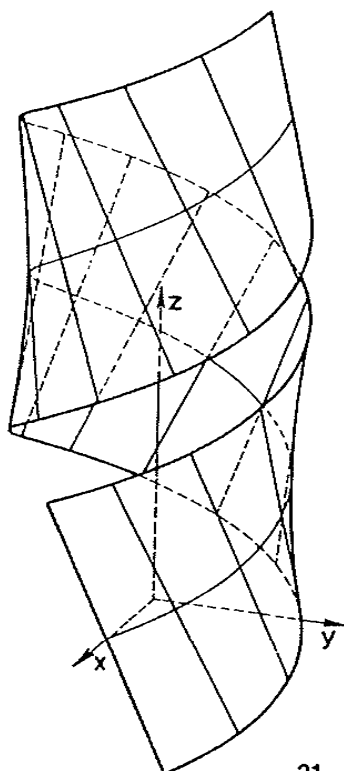
feltétel, ahol

$$\underline{r}(u) = \underline{i}a \cos u + \underline{j}a \sin u + \underline{k}bu,$$

$$\underline{l}(u) = \underline{i}b \sin u - \underline{j}b \cos u + \underline{k}a.$$

Mivel $\dot{\underline{r}}\dot{\underline{r}} = b^3 + a^2b \neq 0$, ha $b \neq 0$, a felület nem lefejtethető.

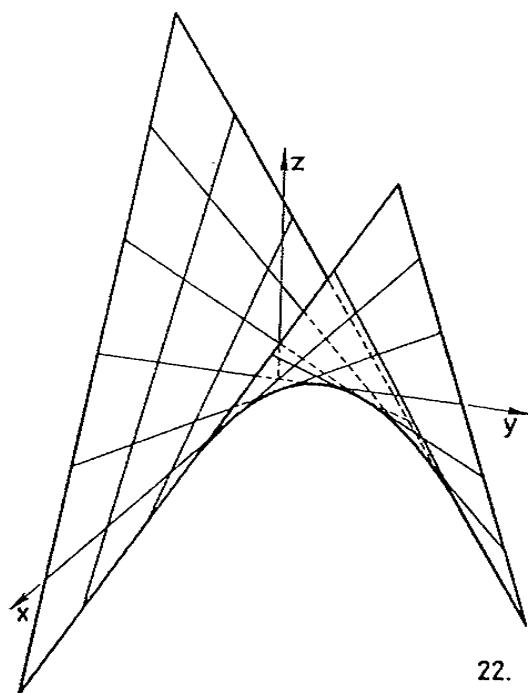
A $b = 0$ esetben a csavarvonal körre fajul el, a szóbanforgó felület hengerfelület, amely lefejtethető.



21.

$$0 \leq u \leq 2,5\pi$$

$$-1 \leq v \leq 1$$

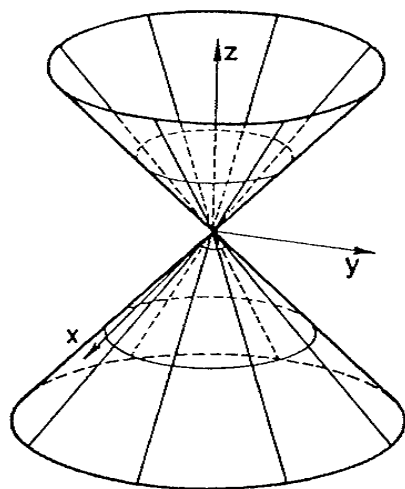


101. A paramétervonalak egyenesek, a felület hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

$$z = xy.$$

$$-3 \leq u < 3$$

$$-3 \leq v \leq 3$$



102. A felület másodrendű kúp

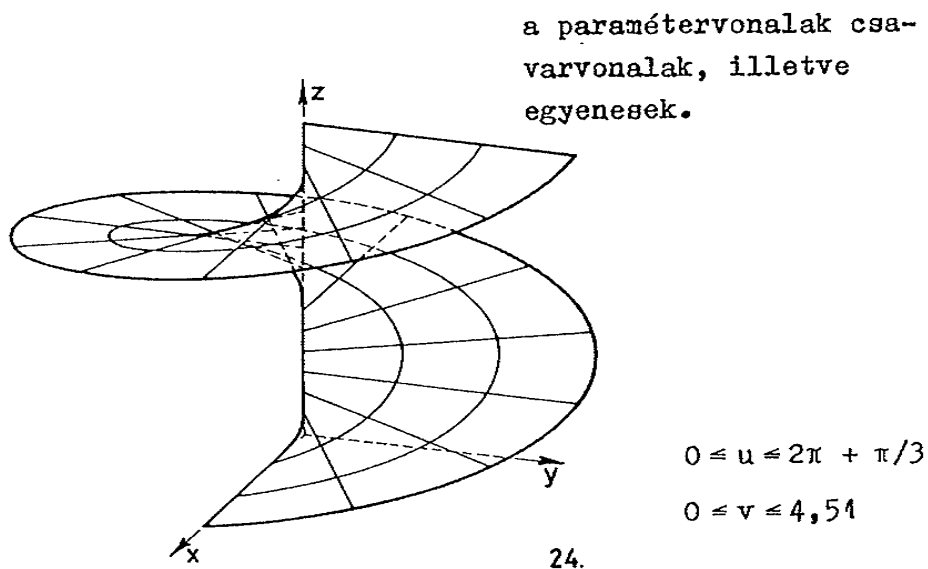
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

a paramétervonalak körök, illetve egyenesek.

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

$$-3 \leq v \leq 3$$

103. A felület zárt, laposmeneti csavarfelület,



104. A felület ferde körhenger, melynek alkotóránya $\underline{a}(1,1,1)$. A paramétervonalak egyenesek, illetve körök.

105. A felület egyköpenyű hiperboloid,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A paramétervonalak hiperbolák, illetve ellipszisek.

106. A felület forgáspároloid,

$$z = x^2 + y^2.$$

A paramétervonalak párolák, illetve körök.

107. Az $\underline{r}(u)$ görbe érintői által alkotott felület az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{\dot{r}}(u)$$

vektorfüggvénnyel állítható elő, amelyre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\underline{\dot{r}}\underline{\dot{r}} = 0$, ahol $\underline{l}(u) \equiv \underline{\dot{r}}(u)$.

108. Egy alkotó különböző pontjaihoz tartozó érintősíkok akkor esnek egybe, ha a felületi normálisok párhuzamosak az alkotó mentén. Felírjuk, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$$

vektoregyenlettel előállított vonalfelületnek az $u = u_0$, $v = 0$ és $u = u_0$, $v = v_0$ paraméterű pontjaiban kiszámított felületi normálisai párhuzamosak.

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{r}}(u) + v\dot{\underline{l}}(u)) \times \underline{l}(u)$$

$$\underline{m}(u_0, 0) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0)$$

$$\underline{m}(u_0, v) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0) + v\dot{\underline{l}}(u_0) \times \underline{l}(u_0).$$

Ez a két vektor akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk zérus (az u_0 paraméter kiírását elhagyjuk):

$$(\dot{\underline{r}} \times \underline{l}) \times (\dot{\underline{r}} \times \underline{l} + v\dot{\underline{l}} \times \underline{l}) = v\underline{l}(\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}}) = 0,$$

ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}} = 0$, vagyis a felület lefejthető.

1. Megjegyzés: A vonalfelület lefejthetősége definiálható a feladatban megfogalmazott feltétellel.
2. Megjegyzés: A vonalfelület pontosan akkor lefejthető, ha bármely pontjában a szorzatgörbület zérus.
Ezért használatos a következő definíció:
Az olyan felületeket, amelyeken mindeütt $K = 0$, lefejthető felületnek nevezzük.

409. A vonalfelületet előállító $\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$ függvényben az első paraméter legyen a vezérgörbe természetes paramétere ($u = s$) és $\underline{l}(u)$ az alkotóirányú egységvektor. A lefejthetőség feltétele $\underline{r}' \underline{l}' \underline{l} = 0$, vagyis a három vektor lineárisan függő az s tetszőleges értékére, azaz

$$(*) \quad \alpha(s)\underline{r}'(s) + \beta(s)\underline{l}'(s) + \gamma(s)\underline{l}(s) = 0.$$

A továbbiakban felhasználjuk, hogy $\underline{l}^2(s) \equiv 1$ deriválásával $\underline{l}' \cdot \underline{l} = 0$, vagyis $\underline{l}' \perp \underline{l}$ adódik.

1. eset Legyen $\alpha(s) \equiv 0$.

A (π) egyenletet skalárisan megszorozzuk $\underline{l}(s)$ -sel, így a $\gamma(s)\underline{l}^2(s) = 0$ összefüggést kapjuk, amely szerint $\gamma(s) \equiv 0$. (π) -ből $\underline{l}'(s) = 0$ adódik, vagyis $\underline{l}(s)$ állandó, a vonalfelület tehát henger.

2. eset Legyen $\alpha(s) \neq 0$.

Ekkor (π) -ből $\underline{r}'(s)$ kifejezhető:

$$\underline{r}'(s) = \lambda(s)\underline{l}'(s) + \mu(s)\underline{l}(s),$$

$$\text{ahol } \lambda(s) = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \quad \text{és} \quad \mu(s) = -\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}.$$

Átrendezéssel

$$\underline{r}'(s) - \lambda(s)\underline{l}'(s) = \mu(s)\underline{l}(s).$$

Vonjuk ki mindkét oldalból a $\lambda'(s)\underline{l}(s)$ szorzatot, így

$$\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)) = (\mu(s) - \lambda'(s))\underline{l}(s)$$

írható. Most két eset lehetséges: vagy $\mu(s) - \lambda'(s) = 0$ és ekkor $\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s) = \underline{c}$ állandó. A vonalfelület egyenletét $\underline{r}(s, v) = \underline{r}(s) + v\underline{l}(s) = \underline{c} + (v + \lambda(s))\underline{l}(s)$ alakba írva kúpfelületet kaptunk.

Ha $\mu(s) - \lambda'(s) \neq 0$, akkor a $\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s))$

vektor és az $\underline{l}(s)$ vektor párhuzamosak. Ebben az esetben a lefejthető vonalfelület egyenlete $\underline{r}(s, v) = \underline{a}^\pi(s) + \sigma(s, v)(\underline{a}^\pi(s))'$ alakban írható, tehát a vonalfelület az $\underline{a}^\pi(s) = \underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)$ görbe érintőegyeneseiből álló felület.

Az $\underline{a}^\pi(s)$ görbét a felület oromvonalának vagy gerincvonalának nevezik.

110. Az adott ponton áthaladó paramétervonalak vektoregyenletei:

$$\underline{r}(u, \frac{\pi}{3}) = u\underline{i} + \frac{1}{2}(1+u)\underline{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+u)\underline{k} \quad (\text{egyenes})$$

$$\text{és} \quad \underline{r}(1, v) = \underline{i} + \underline{j} 2\cos v + \underline{k} 2\sin v \quad (\text{kör}).$$

A paramétervonalak érintővektorai az

$$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j} \cos v + \underline{k} \sin v \quad \text{és az}$$

$$\underline{r}_v = -\underline{j}(1+u)\sin v + \underline{k}(1+u)\cos v$$

derivált vektorok. Az adott pontban

$$\underline{r}_u = (1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \underline{r}_v = (0, -\sqrt{3}, 1)$$

és mivel $\underline{r}_u \underline{r}_v = 0$, az általuk bezárt szög 90° .

$$111. \varphi = 90^\circ.$$

112. Először meghatározzuk az adott ponthoz tartozó paraméterértékeket. A

$$2u - v = 3$$

$$u^2 + v^2 = 5$$

egyenletrendszer megoldásai ($u = 2, v = 1$) és

($u = \frac{2}{5}, v = -\frac{11}{5}$), ezek közül azonban csak az első elégíti ki az $u^3 - v^3 = 7$ egyenletet.

Az $\underline{r}_u, \underline{r}_v$ derivált vektorokat tehát az $u = 2, v = 1$ paraméterű helyen számítjuk ki: $\underline{r}_u = (2, 4, 12)$, $\underline{r}_v = (-1, 2, -3)$. Az u -paramétervonal érintőegyenesének egyenletrendszere

$$x - 3 = \frac{y - 5}{2} = \frac{z - 7}{6}, \quad \text{a } v\text{-para-}$$

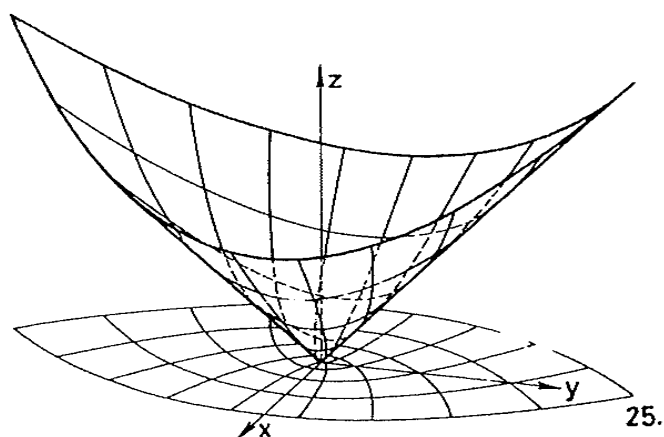
$$\text{métervonalé pedig } 3 - x = \frac{y - 5}{2} = \frac{7 - z}{3}.$$

113. A felület adott pontjának helyvektora

$$\underline{r}(1, 2) = -3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}.$$

$$\underline{r}_u = 2u\underline{i} + 2v\underline{j} + 2u\underline{k},$$

(A 25. ábrán a felület egy darabja az xy -síkra eső merőleges vetületével együtt látható.)



$$-2,25 \leq u \leq 2,25$$

$$\underline{r}_v = -2v\underline{i} + 2u\underline{j} + 2v\underline{k},$$

$$-2,25 \leq v \leq 2,25$$

$$\underline{r}_u(1,2) = (2,4,2),$$

$$\underline{r}_v(1,2) = (-4,2,4).$$

A felületi normális $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = 12\underline{i} - 16\underline{j} + 20\underline{k}$.

A normális egyenes egyenletrendszerét az $\frac{1}{4}\underline{m}$ irányvektorral írjuk fel:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

114. Az adott paraméterértékekhez tartozó felületi pont $P(-7,4,-3)$. Az érintő sík normálvektora

$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normális.

$$\underline{r}_u = 3u^2\underline{i} + v^2\underline{j} + (2uv - 1)\underline{k},$$

$$\underline{r}_v = -4v\underline{i} + 2uv\underline{j} + u^2\underline{k}.$$

Az adott pontban

$$\underline{r}_u(1,-2) = (3,4,-5),$$

$$\underline{r}_v(1,-2) = (8,-4,1).$$

$$\underline{m} = -16\underline{i} - 43\underline{j} - 44\underline{k}.$$

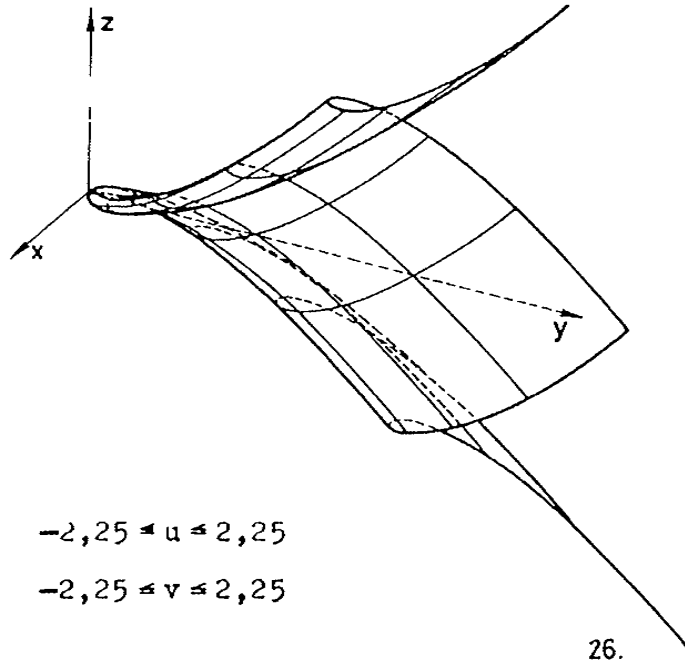
Az érintő sík egyenlete tehát

$$16(x+7) + 43(y-4) + 44(z+3) = 0.$$

$$115. \quad 2x + y + z - 2 = 0.$$

116. $3x - 32y + 128z + 16 = 0.$

117. Nincs
érintő-
sík.
(26.ábra)



$$-2,25 \leq u \leq 2,25$$

$$-2,25 \leq v \leq 2,25$$

26.

118. $6x + 3y - 2z - 7 = 0.$

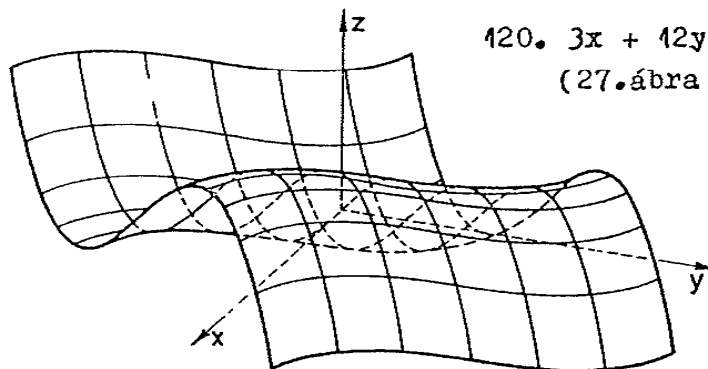
119. $F'_x = y^2, F'_y = 2xy,$
 $F'_z = 3z^2.$

Az adott pontban $F'_x = 4,$

$F'_y = 4, F'_z = 12.$ Az érintő-
sík egyenlete:

$$x + y + 3z - 9 = 0.$$

120. $3x + 12y - z - 18 = 0.$
(27.ábra)



$$-2 \leq x \leq 2$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

27.

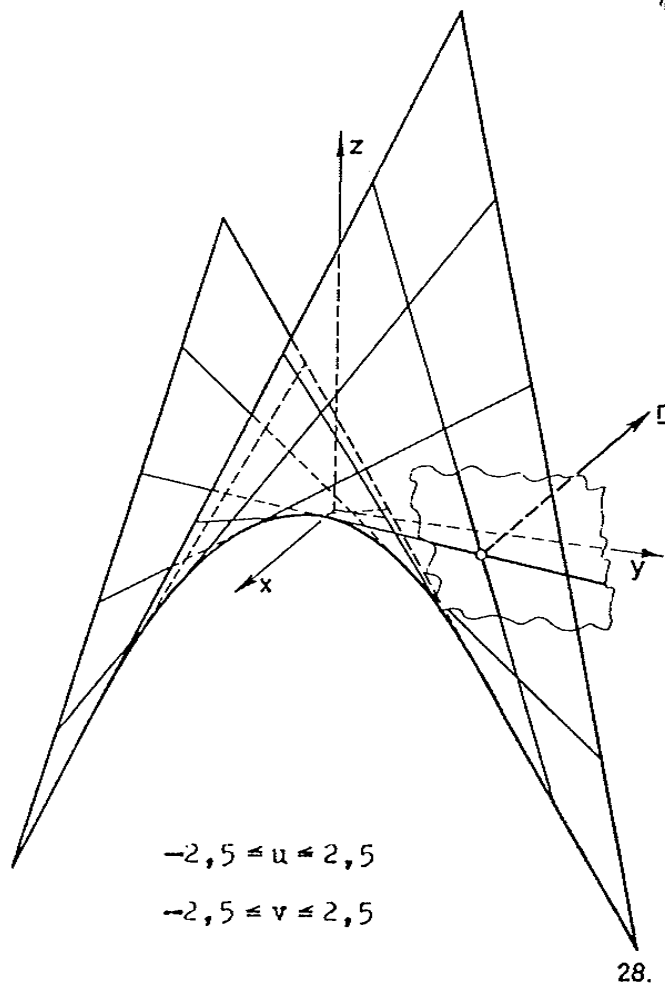
$$121. 3x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

$$122. 3x + 4y + 12z - 169 = 0.$$

$$123. xa \sin v_0 - ya \cos v_0 + zu_0 - au_0 v_0 = 0.$$

$$124. \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

125.



28.

A felületi normális $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (u + v)\underline{i} + (v - u)\underline{j} - 2\underline{k}$ csak úgy lehet párhuzamos az adott sík normálvektorával, ha annak (-1) -szerese. Ez az $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{3}{2}$ paraméterű $P(-1, 2, -\frac{3}{4})$ pontban teljesül.

A keresett érintősík egyenlete tehát

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0.$$

126. Irjuk a felület egyenletét $z = \frac{a^3}{xy}$ alakban. Mivel $z'_x(x_0, y_0) = -\frac{a^3}{x_0^2 y_0}$ és $z'_y(x_0, y_0) = -\frac{a^3}{x_0 y_0^2}$, a $P(x_0, y_0, \frac{a^3}{x_0 y_0})$ ponton áthaladó érintősík egyenlete

$$\frac{a^3}{x_0^2 y_0} (X - x_0) + \frac{a^3}{x_0 y_0^2} (Y - y_0) + (Z - \frac{a^3}{x_0 y_0}) = 0.$$

Az érintősík egyenletét az

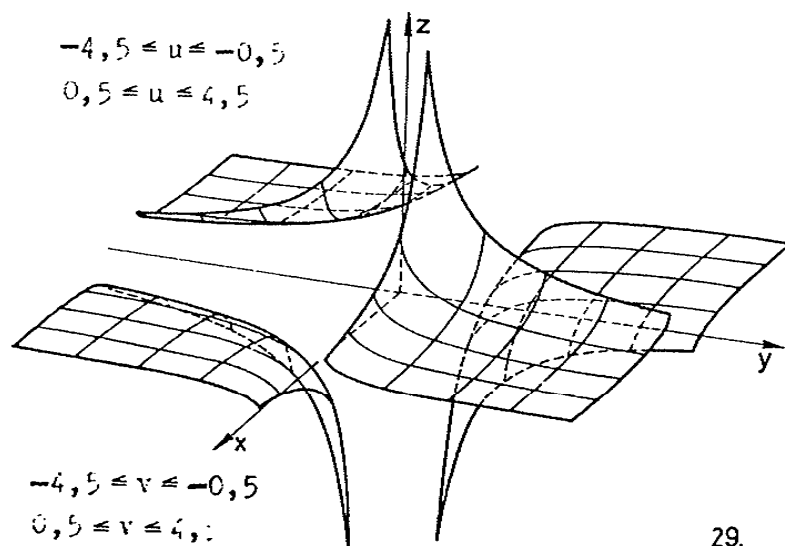
$$\frac{X}{3x_0} + \frac{Y}{3y_0} + \frac{x_0 y_0}{3a^3} Z = 1$$

alakra rendezve könnyen megállapíthatjuk, hogy az a koordinátatengelyekből $3x_0$, $3y_0$, $\frac{3a^3}{x_0 y_0}$ hosszúságú

darabokat vág le. A keresett tetraéder térfogata tehát

$$V = \frac{27}{6} a^3$$

valóban független a P pont megválasztásától.



$$x + y + z - 3 = 0.$$

(A felületet lásd a 29. ábrán.)

128. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete:

$$\frac{1}{3\sqrt{x_0}} x + \frac{1}{3\sqrt{y_0}} y + \frac{1}{3\sqrt{z_0}} z = a^{2/3}.$$

A tengelymetszetek rendre

$$3\sqrt{x_0} \cdot a^{2/3}, \quad 3\sqrt{y_0} \cdot a^{2/3} \quad \text{és} \quad 3\sqrt{z_0} \cdot a^{2/3}$$

hosszúságú szakaszok, amelyeknek négyzetösszege valóban állandó (a^2).

129. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}.$$

A tengelymetszetek rendre $\sqrt{x_0}a$, $\sqrt{y_0}a$, $\sqrt{z_0}a$, amelyeknek összege $\sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$, valóban állandó.

130. A felület $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenlete:

$$x_0^{n-1}x + y_0^{n-1}y + z_0^{n-1}z = a^n.$$

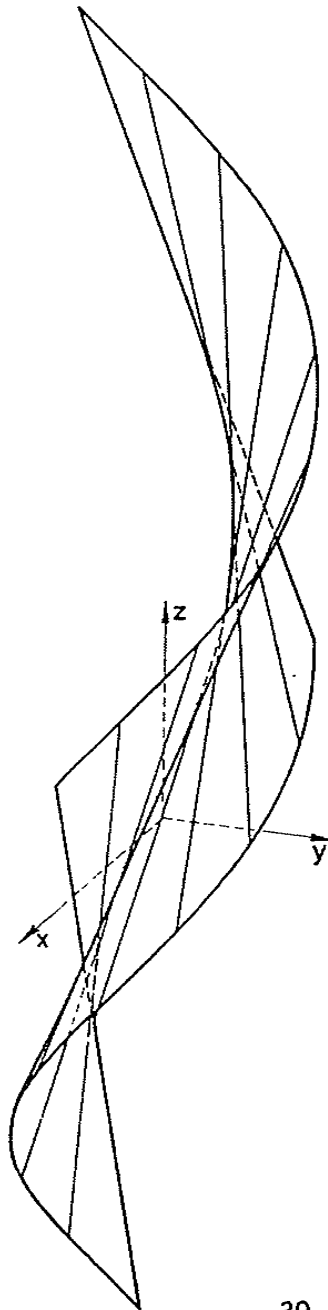
Az $OA = \frac{a^n}{x_0^{n-1}}$, $OB = \frac{a^n}{y_0^{n-1}}$, $OC = \frac{a^n}{z_0^{n-1}}$ tengelymetszetek összege 1, vagyis az állítás igaz.

131. A felületet előállító kétparaméteres vektorfüggvény

$$\underline{r}(u, v) = a(\cos u - v \sin u)\underline{i} + a(\sin u + v \cos u)\underline{j} + b(u + v)\underline{k}.$$

A felületi normális

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (-abv \sin u, abv \cos u, -a^2v).$$



30.

Ha $v = 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \underline{0}$.

Ha $v \neq 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \parallel a$
 $(-b \sin u, b \cos u, -a)$ vektorral, amelynek a $\underline{k}$ egységvektorral bezárt szögére

$$\cos \varphi = \frac{-a}{\sqrt{b^2 + a^2}},$$

a felületi pont megválasztásától független érték.

132. A $z = \operatorname{tg} xy$ felület normálisa

$(\frac{-y}{\cos^2 xy}, \frac{-x}{\cos^2 xy}, 1)$. Az

$x^2 - y^2 = a^2$ felület kétparaméteres vektoregyenlete

$\underline{r}(u, v) = \underline{i}a \operatorname{ch} u + \underline{j}a \operatorname{sh} u + \underline{k}v$,
 a felületi normálisa tehát

$\underline{n}_2(a \operatorname{ch} u, -a \operatorname{sh} u, 0)$. Számítsuk ki az $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2$ skalárszorzatot a két felület közös

pontjaiban, vagyis az

$x = a \operatorname{ch} u, y = a \operatorname{sh} u$ helyen:

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = 0.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$$

$$-2 \leq v \leq 2$$

133. A deriváltvektorok az adott helyen a következők:

$$\underline{r}_u(1, 0, 1), \quad \underline{r}_v(0, 1, -1),$$

$$\underline{r}_{uu}(1, 0, 0), \quad \underline{r}_{uv}(0, 0, 0), \quad \underline{r}_{vv}(0, 1, 0),$$

$$\underline{m}^0(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

A Gauss-féle főmennyiségek a következők:

$$E = 2, \quad F = -1, \quad G = 2, \quad L = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

innen $\dot{u} = 2, \dot{v} = 1$ választással

$$\frac{1}{R\varphi} = -\frac{1}{3}$$

adódik.

134. Az $x = u, y = v$ paraméterezéssel a felület vektoregyenlete $\underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (2u^2 + 4,5v^2)\underline{k}$, $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 1$. $R = \frac{2}{13}$.

$$135. \frac{1}{R} = \frac{2}{49\sqrt{5}}.$$

136. A normálmetszet érintővektorát felírjuk az adott pontban kiszámított $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként. Mivel $\underline{r}_u(4, 2, 4)$ és $\underline{r}_v(-2, -5, 4)$, az első két koordináta felhasználásával

$$\underline{\dot{r}} = 2\underline{r}_u + 3\underline{r}_v.$$

Eszerint $\dot{u} = 2, \dot{v} = 3$ és az $\underline{\dot{r}}$ vektor harmadik koordinátája 20.

$$\underline{m}^0\left(\frac{7}{\sqrt{104}}, -\frac{6}{\sqrt{104}}, \frac{4}{\sqrt{104}}\right),$$

$$E = 36, \quad F = -2, \quad G = 45, \quad L = -\frac{46}{\sqrt{104}}, \quad M = \frac{10}{\sqrt{104}},$$

$$N = -\frac{32}{\sqrt{104}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{-352}{525\sqrt{104}}.$$

$$137. \frac{1}{R} = \frac{8\sqrt{2}}{(5 + \pi^2)\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

$$138. E = 2, \quad F = \frac{1}{2}, \quad G = \frac{5}{4}, \quad L = -\frac{1}{6}, \quad M = \frac{1}{12},$$

$$N = -\frac{1}{24}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{54}.$$

139. A gömbfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} R \cos u + \underline{j} R \sin u \sin v + \underline{k} R \sin u \cos v,$$

ahol R a gömb sugara.

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{R \cos \varphi}.$$

140. A deriváltvektorok az adott pontban

$$\underline{r}_u(1,1,1), \underline{r}_v(1,-1,1), \underline{r}_{uu}(0,0,0), \underline{r}_{uv}(0,0,1), \underline{r}_{vv}(0,0,0), \underline{m}^0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$A \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{egyenletből} \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1, \text{ vagyis}$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (2,0,2) \text{ és } \dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0,2,0).$$

Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, a főirányok éppen a paramétervonalak szögfelezői.

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$141. \quad A \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{egyenletből} \quad 2\dot{u}\dot{v} = 0,$$

tehát a főirányok a következők:

$$\dot{u}_1 = 0, \quad \dot{v}_1 = 1 \quad \text{esetén} \quad \dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_v,$$

$$\dot{u}_2 = 1, \quad \dot{v}_2 = 0 \quad \text{esetén} \quad \dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u.$$

Ez azt jelenti, hogy a főirányok a paramétervonalak érintői, a paramétervonalak adott pontbeli görbületei pedig a főgörbületek.

Megjegyzés: A paramétervonalak akkor és csak akkor főgörbületi vonalak, ha a felület minden pontjában $F = 0$ és $M = 0$ áll fenn (ami itt teljesül).

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{R_2} = 0$ az adott ponton áthaladó paralelkör és alkotóegyenes görbülete.

$$142. \quad H = \frac{45}{7\sqrt{154}}, \quad K = \frac{18}{5929}.$$

143. A felület tetszőleges pontjában $E = 1$,
 $F = 0$, $G = 1$, $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$.

Vagy a 144. feladat megoldásánál kimondott tételre
hivatkozunk, amely szerint $F = 0$, $M = 0$ miatt a fel-
adat állítása igaz, vagy felírjuk a főirányok meghatá-
rozására szolgáló egyenletet:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ahonnan } \dot{u}\dot{v} = 0 \text{ adódik.}$$

Tehát $\dot{r}_1 = \underline{r}_u$, $\dot{r}_2 = \underline{r}_v$, vagyis az állítás igaz.

144. Az adott pontban $\underline{r}_u(-2, -2, 1)$, $\underline{r}_v(-2, -2, -1)$
és $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1$. Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, az

$$\dot{r}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (-4, -4, 0) \text{ és az}$$

$$\dot{r}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0, 0, 2) \text{ vektorok az } \underline{r}_u \text{ és } \underline{r}_v$$

szögének, illetve mellékszögének szögfelezői.

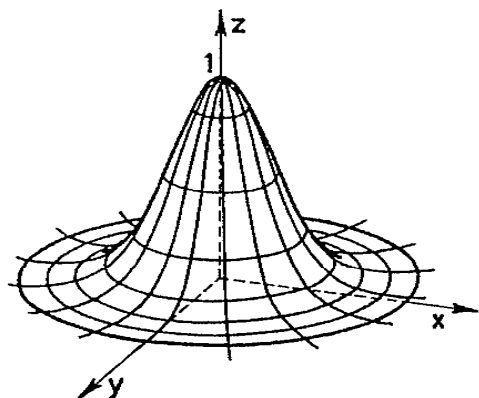
Az $\dot{r}_1$ és az $\underline{m}$ vektorokra illeszkedő fősíki $\dot{r}_1 \perp \dot{r}_2$ és
 $\underline{m} \perp \dot{r}_2$ miatt merőleges az $\dot{r}_2$ vektorra, továbbá átha-
lad a felület $\underline{r}(-1, -1) = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ helyvektorú pontján.
Az egyenlete tehát $z = 0$. A másik fősíki normálvektora
pedig az $\dot{r}_1$, az egyenlete $x + y = 4$.

145. A Gauss-féle fő-
mennyiségek az adott pont-
ban $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$,
 $L = -2$, $M = 0$, $N = -2$. A
főirányok meghatározására
szolgáló

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet $\dot{u}$ és $\dot{v}$ értékétől
független $0 = 0$ azonosság,
vagyis az adott pontban
minden irány főirány, és

mivel $\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = 4 > 0$, az adott pont gömbi pont.



31.

146. Az $u = x$ paraméterezéssel a meridiángörbe egyenlete $\underline{r}(u) = u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j}$, a forgásfelület vektoregyenlete pedig $\underline{r}(u,v) = u\mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin u \sin v \mathbf{k}$ alakban írható. A felület tetszőleges pontjában $E = 1 + \cos^2 u$, $F = 0$, $G = \sin^2 u$, $L = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}$, $M = 0$,

$$N = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}. \text{ A főirányok meghatározására szolgáló}$$

egyenlet szerint $\dot{u} \cdot \sin u \cdot 2\cos^2 u = 0$. Minden irány akkor főirány, ha $u = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ (ezek a gömbi pontok) és $u = \pm k\pi$, amelyek viszont planáris pontok.

Tehát a felület gömbi pontjai az $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) pontok megforgatásával keletkeznek.

$$147. H = 0, \quad K = -\frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}, \quad \text{az állandó szor-}$$

zatgörbületű pontok csavarvonalon helyezkednek el.

148. Az $\underline{r}(u,v) = u\mathbf{i} + \cosh u \cos v \mathbf{j} + \cosh u \sin v \mathbf{k}$ forgásfelület pontjában

$$E = \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 u,$$

$$L = -\frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}, \quad H = 0.$$

$$149. \underline{r}(u,v) = \frac{1}{a} \sin u \cos v \mathbf{i} + \frac{1}{a} \sin u \sin v \mathbf{j} + \frac{1}{a} \left(\ln \tan \frac{u}{2} + \cos u \right) \mathbf{k}. \quad K = -\frac{1}{a^2}.$$

150. Ha az x és y változókat választjuk paraméternek, a felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} \right) \mathbf{k}.$$

$$\text{Mivel } E = 1 + x^2, \quad F = -\frac{xy}{3}, \quad G = 1 + \frac{y^2}{9},$$

$$L = \frac{1}{|\underline{r}_x \times \underline{r}_y|}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{1}{3|\underline{r}_x \times \underline{r}_y|}, \quad \text{a } F = 0$$

feltételből $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ adódik. A keresett pontok

tehát e hiperbola felett helyezkednek el, amely pontok a felületnek a $z = 1$ síkkal alkotott metszéspontjai.

151. A Gauss-féle másodrendű főmennyiségek helyett elegendő az $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \cdot L = D \cdot L$,
 $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| M = DM$ és $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| N = DN$ mennyiségeket kiszámítani. Mivel

$$D^2(LN - M^2) = \pi^2 > 0,$$

az adott pont elliptikus.

152. Hiperbolikus.

153. Hiperbolikus.

154. A tórusz tetszőleges pontjában $L = b$,
 $M = 0$, $N = (a + b \cos u) \cos u$. $LN - M^2 = b(a + b \cos u) \cos u$.
 Az $a > b$ kikötés miatt $a + b \cos u > 0$, tehát $LN - M^2$ előjele $\cos u$ előjelével egyezik meg. Ezek szerint ha $u = \pm \frac{\pi}{2}$, a felületi pontok parabolikusak, ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ (külső tórusz), akkor elliptikusak és ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ (belső tórusz), akkor hiperbolikusak.

155. Minden pont elliptikus.

156. Minden pont parabolikus.

157. Minden pont hiperbolikus.

158. Minden pont hiperbolikus.

159. $z''_{xx} z''_{yy} - z''_{xy}^2 = \frac{3}{x^4 y^4} > 0$, ezért minden pont elliptikus.

160. A felület a $z = e^{-x^2}$ görbe z tengely körüli forgatásával áll elő.

$$z''_{xx} z''_{yy} - z''_{xy}^2 = e^{-2(x^2 + y^2)} [(-2 + 4x^2)(-2 + 4y^2) - 16x^2 y^2] = e^{-2(x^2 + y^2)} [4 - 8x^2 - 8y^2] \geq 0,$$

$$\text{ha} \quad x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

A felület elliptikus pontjai az origó középpontú, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú körtartomány belseje felett, a parabolikus pontok a körvonal felett, a hiperbolikus pontok pedig a körön kívüli síkrész felett helyezkednek el.

161. Minden pont hiperbolikus.

$$162. \text{ Ha } \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{16} < x^2 + y^2 < \frac{k^2 \pi^2}{4} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor a pont hiperbolikus.

$$\text{Ha } x^2 + y^2 = \frac{k^2 \pi^2}{16}, \text{ akkor a pont parabolikus.}$$

$$\text{Ha } \frac{k^2 \pi^2}{4} < x^2 + y^2 < \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16}, \text{ akkor a pont elliptikus.}$$

$$163. D^2(LN - M^2) = -9(u - v)^3$$

A felület pontja tehát az $u = v$ feltétel mellett parabolikus, ezek az $\underline{r}(u) = 2u\underline{i} + u^2\underline{j} + 2u^3\underline{k}$ felületi görbe pontjai.

$$164. D = \sqrt{4u^2 + 9v^2(1 + 4u^2)}, \text{ ezért az } u = 0, v = 0 \text{ paraméterű pontot ki kell zárni.}$$

$$DL = 6v^2, \quad M = 0, \quad DN = 12uv$$

$$D^2(LN - M^2) = 72uv^3.$$

A felület parabolikus pontjai tehát az $u = 0, v \neq 0$ és a $v = 0, u \neq 0$ paramétervonalak pontjai.

TARTALOMJEGYZÉK

VEKTORALGEBRA	3
Vektorok összeadása, kivonása; szorzás szám- mal; koordináták; lineáris függetlenség	3
Vektoriális szorzat	15
Többtenyezős vektorszorzatok; vegyesszorzat, kifejtési tétel	19
AZ EGYENES ÉS A SIK ANALITIKUS GEOMETRIÁJA	23
Az egyenes a kétdimenziós koordinátarendszerben	23
Az egyenes a háromdimenziós koordinátarendszer- ben	24
Sík és egyenes, vegyes feladatok	36
Koordináta-transzformáció	40
Térgeometriai feladatok analitikus és ábrázoló geometriai megoldása	43
Kötött vektor, vektorrendszerek	48
A FELADATOK MEGOLDÁSAI	56
GÖRBÉK	121
Ruletták	121
Görbék egyenlete, érintő	122
Kisérő triéder	126
Görbület, torzió, Frenet képletek	129

FELÜLETEK	133
Felületek egyenletei, lefejtethető vonalfelületek .	133
Felületi normális, érintősík	136
Felületi görbék görbülete	139
Főgörbületek, főirányok	141
Felületi pontok osztályozása	143
A FELADATOK MEGOLDÁSAI	145