Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
**Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok**

# Matematika A1H – Írásbeli vizsga – M feladatsor

Dátum: 2015. január 19. Munkaidő: 90 perc

---

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

---

**1.)** (4 pont) Milyen tulajdonságok esetén nevezünk egy relációt (nem feltétlenül szigorú!) *rendezési-relációnak*? Írja le ezeknek a tulajdonságoknak a pontos definícióját is!

**2.)** (5 pont) a) Fogalmazza meg a differenciálszámítás Lagrange-féle középérték-tételét! b) Nevezzen meg legalább három olyan tételt, amelynél felhasználtuk ezt az eredményt!

**3.)** (6 pont) Mondja pontosan ki, és bizonyítsa is be az Integrálszámítás Középértéktételét!

**4.)** (3 pont) Számítsa ki a $\sum_{j=0}^{4} \binom{8}{2j}(-1)^j$ szám értékét! (Útmutatás: Egészítse ki a szummázást úgy, hogy a keresett kifejezés azután is az összeg valós része maradjon!)

**5.)** (4 pont) Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty} \tanh\left(\frac{n! - 5^n}{3^n}\right)$ határértéket!

**6.)** (4 pont) Tegyük fel, hogy a $p(x)$ függvény az egész $\mathbb{R}$-en folytonos, és periodikus 1-gyel: $p \in C(\mathbb{R})$ és $p(x+1) \equiv p(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p(x)$-nek van (véges) torlódási pontja $x \to +\infty$-re! b) Igazoljuk, hogy ha $p$ nem azonosan konstans függvény, akkor végtelen sok torlódási pontja is van!

**7.)** (6 pont) a) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a $\varphi(x) := \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$ függvényre! b) Igazoljuk, hogy $\varphi$ invertálható! Mi lesz az inverz függvény $\mathcal{R}_{\varphi^{-1}}$ *értékkészlete*?

**8.)** (6 pont) Létezik-e olyan $k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvex függvény, amelyre $k(0) = 0$, $k(1) = 1$, és $\lim_{x\to\infty} k(x) = 2\pi$?

**9.)** (6 pont) Keressük meg az összes olyan pontot a $\Theta(t) := (t^2, t^3 - 3t)$ görbén, ahol a görbe menetének iránya a) vízszintes b) $m = 4$ meredekségű!

**10.)** (6 pont) Határozza meg az $\int \frac{dx}{2 + \cos x + 2\sin x}$ integrált!

**11.)** (4 pont) Tekintsük az $[1, 16]$ szakasz fölött a $\Phi(x) := 2\sqrt{x-1}$ függvényt! Mennyi lesz annak a súrolt $S$ forgásfelületnek a felszíne, amelyet a görbe az $x$ tengely körüli teljes körbeforgatása során súrol?

**12.)** (6 pont) Tekintsük az $e^{-x}$ görbe pozitív valós féltengely fölötti gráfjának az $x$ tengely körüli körbeforgatásával létrejövő, végtelenbe nyúló forgásfelületet, és az általa körbezárt $F$ forgástestet! Tekintsük továbbá tetszőlegesen adott $R > 0$ paraméter mellett a görbe $[0, R]$ szakasz feletti darabját, és az ennek megforgatásával körbezárt $F_R$ forgástestet is.
a) Mennyi lesz az $F_R$ forgástest $V(F_R)$ térfogata?
b) Értelmezhető-e véges értékkel a végtelen $F$ forgástest $V(F)$ térfogata (azaz konvergens-e a térfogati integrál formula végtelenbe kiterjeszett improprius integrálja)?

## Matematika A1H – M vizsga feladatsor – Megoldások

---

**1.)** (4 pont) Rendezési reláció csak $A \times A$ típusú Descartes-szorzaton értelmezhető, azaz csak egyetlen $A$ alaphalmaz elemei között (1). Az $R \subset A \times A$ reláció akkor rendezési reláció, ha *reflexív* ($\forall a \in A, (a, a) \in R$ , antiszimmetrikus ($(a, b) \in R$ & $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$) és *tranzitív* ($(a, b) \in R$ &$(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$) (1+1+1).

**2.)** (5 pont) Lagrange k.é.t.: Ha $f$ egy $I := [a, b]$ korlátos és zárt intervallumon differenciálható függvény, akkor $\exists\ c \in I$ pont, amelyre $f'(c) = m := \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. (2)

Ez kellett az ú.n. "Triviális tételhez", t.i. hogy ha egy $I$ intervallumon $f' \equiv 0$, akkor $f \equiv c$ (konstans). Felhasználtuk a monoton függvények karakterizációjához: $f \in D(I)$ monton $\Leftrightarrow f'$ állandó előjelű $I$-n. Használtuk a Darboux tétel (ha $f \in D(I)$ akkor $\mathcal{R}_f$ intervallum – azaz bármely két felvett érték között elhelyezkedő számot is felvesz valahol) igazolásakor is. De ezt használtuk az Integrálszámítás Középértéktételének (ha $f \in C[a, b]$, akkor $\exists c \in [a, b]$, hogy $f(c)(b - a) = \int_a^b f(t)dt$) bizonyításában is. (1+...+1)

**3.)** (6 pont) Integrálszámítás Középértéktétele: ha $f \in C[a, b]$, akkor $\exists c \in [a, b]$, hogy $f(c)(b - a) = \int_a^b f(t)dt$ (2).

Biz.: Mivel $f \in C[a, b]$, van primitív fv.e, mondjuk $F$ (1), továbbá a Newton-Leibniz szabály miatt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (1). Elosztva $b - a$-val és alkalmazva $F$-re a Lagrange k.é.t.-t (1), adódik, hogy $\exists c \in [a, b]$, ahol $f(c) = F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ (1).

Lehet úgy is okoskodni, hogy először is a *minimum-maximum szabályt alkalmazzuk*: ha $m := \min_{[a,b]} f$ és $M := \max_{[a,b]} f$, akkor $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$ (1) – itt a minimum és maximum létezése (e.a.-n igazolt tétel szerint) következik abból, hogy $f \in C[a, b]$ (1). Így az $y := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ értéke valahol az $[m, M]$ intervallumban helyezkedik el (1), ezt az $y$ értéket pedig akkor a folytonos $f$ függvény felveszi, u.i. Bolzano tétele miatt $\mathcal{R}_f = [m, M] \ni y$ (1).

**4.)** (3 pont) $\sum_{j=0}^{4} \binom{8}{2j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{4} \binom{8}{2j} i^{2j} = \Re \sum_{\ell=0}^{8} \binom{8}{\ell} i^\ell$ (1) $= \Re \sum_{\ell=0}^{8} \binom{8}{\ell} i^\ell 1^{8-\ell} = \Re(1 + i)^8$ (a binomiális tétel szerint) (1). Ez tovább $= \Re\sqrt{2}^8 e(8\pi/4) = \Re 16e(2\pi) = 16$ (1).

**5.)** (4 pont) Indukcióval (1) könnyen látható, hogy $n! - 5^n > 5^n$ ($\Leftrightarrow n! > 2 \cdot 5^n$) ha pl. $n \geq 10$ (1), tehát $\frac{n!-5^n}{3^n} > (5/3)^n \to \infty$ (1). Így $\lim_{n\to\infty} \tanh\left(\frac{n!-5^n}{3^n}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \tanh x = 1$ (1).

Lehet úgy is számolni, hogy $\frac{n!-5^n}{3^n} = \frac{n!(1-5^n/n!)}{3^n}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!-5^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{5^n}{n!}) \frac{n!}{3^n}$ (1) ami továbbra $= \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{5^n}{n!}) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n}$ (1). Ez a két határérték az ismert $a^n/n! \to 0$ $(n \to \infty)$ nagyságrendi összehasonlító limesz alapján könnyen kiszámítható: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{5^n}{n!}) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} = 1 \cdot +\infty = +\infty$ (1). Így, mint előbb, $\lim_{n\to\infty} \tanh\left(\frac{n!-5^n}{3^n}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \tanh x = 1$ (1).

**6.)** (5 pont) Legyen $\alpha \in \mathcal{R}_p$ tetszőleges pont az értékkészletből, azaz olyan érték, amelyre $\exists x \in \mathbb{R}$, hogy $p(x) = \alpha$. Mivel $p$ periodikus 1-gyel, ebből $p(x + n) = p(x) = \alpha$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re (1). Tehát az $x_n := x + n$ sorozatra (amelyre $x_n \to \infty$), azt találjuk, hogy $p(x_n) \to \alpha$, és ezért $\alpha$ torlódási pontja $p$-nek a $\infty$-ben (1). Így a torlódási pontok $T$ halmaza tartalmazza $\mathcal{R}_p$-t (1). De a $p \in C(\mathbb{R})$ fv. értékkészlete Bolzano tétele értelmében csak teljes intervallum lehet (1), így az vagy elfajuló, egypontú intervallum (és ekkor lehet $p \equiv c$ konstans) – vagy nem elfajuló, és ekkor végtelen (1).

**7.)** (6 pont) a) (4 pont) A logaritmus függvény pozitív értékekre van értelmezve, így $\mathcal{D}_\varphi = (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ (1). Az értékkészlet meghatározásához kiszámítjuk, hogy $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = \log 1 = 0$, $\lim_{x\to -1-0}\varphi(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+0}\varphi(x) = -\infty$ (1), és $\varphi'(x) = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$ az $\mathcal{R}_\varphi$-n, ezért $\varphi$ mindkét félegyenesen szigorúan monoton növekedő, ugyanakkor Bolzano tétele értelmében a határértékek között minden értéket felvesz, így $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_{\varphi|_{(-\infty,-1)}} \cup \mathcal{R}_{\varphi|_{(0,\infty)}} = (-\infty,0)\cup(0,\infty) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. (Egyébként a 0-t tényleg nem veheti fel a függvény, mert $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \quad x = x+1$, ami lehetetlen: így zéróhelye a $\varphi$ függvénynek nincs.) (1) A függvény menete $(-\infty,-1)$-ben konvex, inflexiós pontja nincs, (u.i. csak $(-1/2$ lenne, de az nem $\in \mathcal{D}_\varphi)$ és $(0,+\infty)$ között konkáv, amint az a $\varphi''(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ második derivált előjeléből látszik (1).

b) (2 pont) Az egyes félegyeneseken külön-külön már a szigorú monotonitás miatt is igaz az invertálhatóság, de $\varphi$ értékkészlete a két félegyenesen *diszjunkt, ezért $\varphi$ is invertálható* (1). Végül, ha van inverz függvény, akkor $\mathcal{R}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{D}_\varphi = (-\infty,-1)\cup(0,\infty) = \mathbb{R}\setminus[0,1]$ (1).

(<u>Ellenőrzés:</u> Az invertálhatóság azt jelenti, hogy ezen az értelmezési tartományon egyértelműen megoldható az $y = \varphi(x)$ egyenlet: és valóban, $e^y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1-e^y}$, tehát $\varphi^{-1}(y) = \frac{e^y}{1-e^y}$. Vegyük észre, hogy a számoláshoz éppen az kellett, hogy $y \neq 0$.)

**8.)** (6 pont) NEM (1).

U.i. ha $k$ konvex fv., akkor a $(0,(k(0))$ és $(1,k(1))$ pontokon át húzott $h(x) = mx + k(0)$, $m = \frac{k(1)-k(0)}{1-0} = 1$, azaz $h(x) = x$ húrja (1+1) a $[0,1]$ szakaszon a fv. felett, azon kívül pedig a fv. alatt halad (1): tehát $x > 1$-re $k(x) \geq x$ (1), és ezért $\lim_{x\to\infty} k(x) = +\infty$ (1).

**9.)** (6 pont) Ehhez $\nabla\Theta(t) = (\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = (2t, 3t^2-3)$ (1), és ez az irányvektor akkor a) vízszintes, ha a meredekségre $0 = m = \dot{y}(t)/\dot{x}(t) = 3(t^2-1)/2t$ (1), amiből $t^2 = 1$, $t = \pm 1$, $\Theta(1) = (1,-2)$ és $\Theta(-1) = (1,2)$ (1); b) és akkor $m = 4$ meredekségű, ha $4 = m = \dot{y}(t)/\dot{x}(t) = 3(t^2-1)/2t$ (1), amiből $3t^2 - 8t - 3 = 0$, $t_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6} = 3$ és $-1/3$ (1), tehát a keresett görbepontok $\Theta(3) = (9,18)$ és $\Theta(-1/3) = (1/9, 26/27)$ (1).

**10.)** (6 pont) Ez trigonometrikus rac.tört fv., tehát a *Weierstrass-féle* $t = \mathrm{tg}\,(x/2)$, $x = 2\arctan t$ *helyettesítés* célra kell vezessen (1). Ezt elvégezve, $I := \int \frac{dx}{2+\cos x + 2\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+4t+3}$ (1). Elemi parciális törtekre bontjuk az integrandust: $\frac{2}{t^2+4t+3} = \frac{2}{(t+1)(t+3)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+3}$ (1), amiből e.h. egyeztetéssel $t^1:\ A+B = 0$, $t^0:\ 3A+B = 2$, tehát $A = 1$, $B = -1$ (1) és $I = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right)\,dt = \log\left(\frac{t+1}{t+3}\right) + C = \log\left(\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)+1}{\mathrm{tg}\,(x/2)+3}\right) + C$ (1+1).

**11.)** (4 pont) $A(S) = \int_1^{16} 2\pi\Phi(x)\sqrt{\Phi'(x)^2+1}\,dx = \int_1^{16} 2\pi 2\sqrt{x-1}\sqrt{(1/\sqrt{x-1})^2+1}\,dx = \int_1^{16} 4\pi\sqrt{x}\,dx = 4\pi\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{16} = 168\pi$ (1+1+1+1).

**12.)** (6 pont) a) A térfogati integrál $V(F_R) = \int_0^R \pi(e^{-x})^2\,dx$, (1) ami tovább kiszámítva $= \pi\int_0^R e^{-2x}\,dx = \pi[\frac{-1}{2}e^{-2x}]_0^R = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2R})$ (1).

b) Ha $R\to\infty$, akkor $\lim_{R\to\infty} V(F_R) = \pi/2$ (1), amivel tehát végesen értelmezni lehet a $V(F) := \lim_{R\to\infty} V(F_R) = \pi/2$ térfogatot is (1).

Ez azt is jelenti, hogy a $V(F) := \int_0^\infty \pi(e^{-x})^2\,dx$ (1) "végtelen térfogati integrál formula" egy kovergens improprius integrál (1).