Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok

Matematika A1H - Írásbeli vizsga F feladatsor

Dátum: 2015. január 12. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

1.) (6 pont) a) Mondja ki a halmazműveletek öt alaptulajdonságát, és írja le ezeket a metszetre vonatkozólag! b) Mi teremt kapcsolatot a halmaz-unió és a halmaz-metszet ezen tulajdonságai között?

2.) (6 pont) Mi a *pontos definíciója* annak, hogy a) egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex halmaz?
b) egy I intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *konvex* az I-n?
c) Hogyan lehet karakterizálni ezt a tulajdonságot a derivált segítségével, ha $f \in \mathcal{D}(I)$? (Figyelem! Az nincsen feltéve, hogy $f \in \mathcal{D}^2(I)$, így f" létezése nem biztosított! Tehát *nem* a második deriválttal kell szükséges és elégséges feltétel a konvexitásra, hanem f'-vel!)

3.) (5 pont) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a helyettesítéses integrálás formuláját Riemann integrálokra!

4.) (4 pont) Oldja meg az $\dfrac{|z|^2 z}{\bar{z}} + 2\,\mathbf{Re}z = z$ egyenletet a komplex számok körében!

5.) (5 pont) Szüntesse meg a $\psi(x) := \dfrac{\log^2(x) - 2\log(x^2) - 5}{\log(ex)}$ függvény szakadását!

6.) (6 pont) Van-e olyan $\mathbb{R}$-en értelmezett Ψ konkáv függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to-\infty} \Psi(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi(x) = 1$?

7.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan pontot a $\Phi(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ asztroid-görbén, ahol a görbe érintőjének meredeksége -1!

8.) (5 pont) Számítsa ki az $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{20}}\,dx$ integrált!

9.) (5 pont) A ciklois görbe egyenlete $(x(\theta), y(\theta)) = (r(\theta - \sin\theta), r\cos\theta)$, ahol $r > 0$ adott sugár, és $0 \le \theta \le 2\pi$ az elfordulási paraméter. Számítsa ki a ciklois-görbe ívhosszát!

10.) (4 pont) Számítsuk ki az R sugarú gömb felszínét úgy, hogy az origó középpont körül rajzolt R sugarú pozitív félkörívet az x tengely körül körbeforgatjuk!

11.) (5 pont) Vegyük az e^x exponenciális görbe $[0, 1]$ szakasz feletti darabja alatti Q síktartományt! Számítsa ki Q súlypontjának koordinátáit!

12.) (5 pont) Konvergens-e az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ improprius Riemann-integrál? (Ha igen, számítsuk ki, ha nem, indokoljuk meg, hogy miért nem!)

Matematika A1H – F vizsga feladatsor – Megoldások

1.) (6 pont) a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asszociatív); $A \cap B = B \cap A$ (kommutatív); $A \cap A = A$ (idempotens); $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (disztributív); $A \cap (A \cup B) = A$ (elnyelő) (1+...+1). b) A De Morgan azonosságok (1).

2.) (6 pont) a) A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex, ha minden $P, Q \in K$ pontpárra a pontok között felvett $[P,Q] := \{tP + (1-t)Q \ : \ 0 \le t \le 1\}$ szakasz is K-ban van: $[P,Q] \subset K$ (2).

b) Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ha a $H_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \in I, y \ge f(x)\}$ – az f fv. ú.n. *felső halmaza – konvex halmaz* $\mathbb{R}^2$-ben (2).

c) Ha $f \in \mathcal{D}(I)$, akkor a konvexitás azzal egyenértékű, hogy az f' *deriváltfüggvény monoton növő* I-n (2).

3.) (5 pont) Helyettesítéses integrál formula: Ha az $I = [a,b]$ intervallumon $f \in C(I)$ (folytonos) és $g \in C^1(I)$ (folytonosan diff.ható), akkor $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ (1).

Biz.: Tekintsük mindkét oldalon az integrandusok F ill. G primitív függvényeit, – tehát amelyekre $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ –a melyek léteznek, mert feltétel szerint az integrandus fv.ek folytonosak. (1)

Ekkor a Newton-Leibniz szabály értelmében a baloldal $F(g(b)) - F(g(a))$, a jobb oldal pedig G megváltozása: $G(b) - G(a)$ (1).

Vegyük észre, hogy $G(x) := F(g(x))$ deriváltja $f(g(x))g'(x)$ (kompozíció fv. deriválása és $F' = f$) (1), tehát $G = F \circ g$ egy primitív fv. és $G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a))$ – így a két oldal = (1).

4.) (4 pont) Legyen $z := x + iy$. Ekkor $\frac{|z|^2 z}{\overline{z}} = -x + iy$, $|z|^2 z = -\overline{z}^2$, $|z|^2 z^3 = -|z|^4$, azaz $z^3 = -|z|^2$. Itt $r := |z| (\ge 0)$ mellett az abszolút értékekből csak $r = 1$ lehet, mert $r = 0$ kizárt az eredeti nevezőben levő $\overline{z}$ miatt. $z^3 = -1$-nek a páratlan hatodik egységgyökök a megoldásai: $z = e(\frac{2j-1}{6} 2\pi)$ $(j = 1,2,3)$ azaz $z = -1$ és $z = \cos(\pi/3) \pm i \sin(\pi/3) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Lehet okoskodni úgy is, hogy a $|z|^2 = z\overline{z}$ felbontással a baloldalon egyszerűsítünk $\overline{z}$-tal (itt ugye kikötve, hogy $z \neq 0$!), és ezután a $z^2 = -\overline{z}$ egyenletet oldjuk meg hasonlóan.

Lehetséges a valós és képzetes részek külön kezelése és az adódó valós egyenletrendszer megoldása is: itt pl. $x^2 - y^2 = -x$ és $2xy = y$ egyenletrendszer adódik, a másodikból pedig vagy $y = 0$ és akkor az elsőből $x = 0$ kizárt, tehát $x = -1$ lesz, vagy $y \neq 0$, és akkor a második adja, hogy $x = 1/2$, és az első, hogy $y^2 = 3/4$ (tehát persze u.az a mego. jön ki).

5.) (5 pont) $\mathcal{D}_{\log} = (0, +\infty)$, és itt ψ is értelmezett, kivéve, ahol a nevező 0 lesz, tehát ahol $\log(ex) = 0 \Leftrightarrow 1 + \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1/e$. Tehát $\mathcal{D}_\psi = (0, 1/e) \cup (1/e, \infty)$ (1) és az $1/e$ pontban nincsen értelmezve ψ, másutt mindenütt folytonos (és differenciálható is): tehát az $1/e$ pontban kell megvizsgálni, hogy megszüntethető-e a szakadása (1). Kérdés tehát, hogy van-e határértéke ψ-nek $x \to 1/e$ esetén. A számlálót is és a nevezőt is $y := \log x$ segítségével írhatjuk fel, mert $\log(ex) = 1 + \log x = 1 + y$ és $\log x^2 = 2 \log x = 2y$ (1). A kérdéses határérték tehát $\lim_{x \to 1/e} \psi(x) = \lim_{y := \log x \to -1} \frac{y^2 - 4y - 5}{1+y} = \lim_{y \to -1} \frac{(y-5)(y+1)}{1+y} = \lim_{y \to -1} (y-5) = -6$ (1), létezik, és így a szakadás az $1/e$ pontban megszüntethető a $\psi(1/e) := -6$ definícióval (1).

6.) (6 pont) NINCS (1). Ugyanis ha egy konkáv fv. korlátos, akkor konstans (1), és ekkor persze a két végtelenben vett határértékei sem lehetnek különbözőek (1). (% !)

6.) m.o. folytatása: Korlátosság bizonyítása: ha Ψ konkáv, akkor $\Psi \in C(\mathbb{R})$, így a két végtelenben vett határértékek miatt $|\Psi(x)| < 1$ ha $x < -K$, $|\Psi(x)| < 2$ ha $x > K'$, és a köztes $[-K, K']$ intervallumon pedig az előadásról ismert tétel miatt a folytonos Ψ fv. korlátos (1).

$\Psi \equiv c$ konstans bizonyítása: ha $|\Psi(x)| \leq C$, akkor tetszőleges rögzített $a \in \mathbb{R}$ pontra a $\frac{\Psi(x)-\Psi(a)}{x-a}$ húr-meredekség 0-hoz tart, amint $x \to \infty$, ezért a konkávitás értelmében minden (balról) a-ba érkező húr meredeksége is legalább 0. Ugyanígy, ha $x \to -\infty$, akkor is 0-hoz tart a húrok merdeksége, így minden a-tól jobbra eső ponthoz húzott húr meredeksége legfeljebb 0 (1). Összességében tehát kapjuk, hogy az a-ba balról húzott húrok meredeksége ≥ 0, az a-ból kiinduló (jobbra haladó) húrok meredeksége pedig ≤ 0, tehát Ψ-nek a-ban maximuma van. S mivel ez tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontra igaz, adódik, hogy $\Psi \equiv c$ konstans (1).

$\Psi \equiv c$ másik bizonyítása: T.f.h. $a < b$ és $H(x)$ az $A := (a, f(a))$, $B := (b, f(b))$ pontok között meghúzott húr. Ekkor $H(x) = mx + c$ alakú, ahol $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ a húr meredeksége: azt akarjuk igazolni, hogy $f(b) = f(a)$ tetszőleges pontokra, ami azzal egyenértékű, hogy $m = 0$. (Ekkor valóban $\Psi(a) = c = \Psi(b)$, $\Psi \equiv c$.) (1)

A konkávitás miatt viszont $\Psi(x) \geq H(x)$, ha $x \notin [a, b]$: ha tehát $m > 0$, akkor $x \to +\infty$, ha pedig $m < 0$, akkor $x \to -\infty$ esetén lesz H, és emiatt vele együtt Ψ is nagyon nagy, nem korlátos. (Ezt konkretizálni is könnyen lehet: ha $y := y_n :=\!= n(b-a) + a$, akkor $n = 0$-ra $y_0 = a$, $n = 1$-re $y_1 = b$, minden más $n \in \mathbb{Z}$ esetén $y_n \notin [a, b]$, és $\Psi(y_n) \geq H(y_n) = nm + c$, amiről nyilvánvaló, hogy csak úgy maradhat korlátos, ha $m = 0$.)

7.) (4 pont) A derivált $\nabla\Phi(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ (1), az érintő meredeksége $m = \dot{y}(t)/\dot{x}(t) = -\operatorname{tg} t$ (1), tehát a $-\operatorname{tg} t = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 1$ egyenletet kell megoldjuk (1); ennek megoldásai a teljes $[0, 2\pi)$ periódus-intervallumon $t = \pi/4$ és $t = 5\pi/4$, így a keresett pontok $\Phi(\pi/4) = (1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8})$ és $\Phi(5\pi/4) = (-1/\sqrt{8}, -1/\sqrt{8})$ (1).

8.) (5 pont) Az $y = x - 1$ helyettesítéssel (1) az integrál $= \int \frac{(y+1)^2}{y^{20}} dy = \int \frac{y^2+2y+1}{y^{20}} dy = \int y^{-18} dy + 2\int y^{-19} dy + \int y^{-20} dy = -\frac{1}{17}(x-1)^{-17} - \frac{1}{9}(x-1)^{-18} - \frac{1}{19}(x-1)^{-19} + C$ (1+1+1+1).

Kétszeri parciális integrálással is dolgozhatunk (1): $\int \frac{x^2}{(x-1)^{20}}\, dx = x^2 \frac{-1}{19}(x-1)^{-19} - \int 2x \frac{-1}{19}(x-1)^{-19}\, dx = \frac{-1}{19}x^2(x-1)^{-19} + \frac{2}{19}\int x(x-1)^{-19}\, dx = \frac{-1}{19}x^2(x-1)^{-19} + \frac{2}{19}[x\frac{-1}{18}(x-1)^{-18}] + \frac{2}{19\cdot 18}\int (x-1)^{-18}\, dx = -\frac{1}{19}x^2(x-1)^{-19} - \frac{2}{19\cdot 18}x(x-1)^{-18} - \frac{2}{19\cdot 18\cdot 17}(x-1)^{-17} + C$ (1+1+1+1) (ami az $x = x - 1 + 1$ beírásával kiszámolhatóan megegyezik a fenti alakkal is).

9.) (5 pont) $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(\theta) + \dot{y}^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\, d\theta$ (1+1)
$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$ (1)
$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(\theta/2)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} 2\sin(\theta/2)\, d\theta = 4r\int_0^{\pi} \sin t\, dt = 8r$ (1 + 1).

10.) (4 pont) A félkörív $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (1), ezért $F = \int_{-R}^{R} 2\pi f(x)\sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$ (1). Itt $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ (1), ezért $F = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2} + 1} dx = 2\pi\int_{-R}^{R} R dx = 4\pi R^2$ (1).

11.) (5 pont) A teljes terület $T = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1$ (1), a súlypont koordinátái $s_x = \frac{1}{e-1}\int_0^1 xe^x\, dx = \frac{1}{e-1}\left\{[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx\right\} = \frac{1}{e-1}\{e - (e-1)\} = \frac{1}{e-1}$ (1+1),
és $s_y = \frac{1}{e-1}\int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \frac{1}{e-1}\frac{1}{4}[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{e-1}\frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e+1}{4}$ (1+1).

12.) (5 pont) NEEEEEEM ! (2) U.i. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx := \lim_{T\to-\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx + \lim_{R\to\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{T\to-\infty}[\ln(1+x^2)]_{-T}^{0} + \lim_{R\to\infty}[\ln(1+x^2)]_0^R = \lim_{T\to-\infty}(-\ln(1+T^2)) + \lim_{R\to\infty}\ln(1+R^2)$ és ez $\infty - \infty$ típusú, nincsen értelmezve (1+1+1).