Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok

Matematika A1H - Írásbeli vizsga I - J feladatsor

Dátum: 2015. január Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

1.) (4 pont) a) Lehet-e egy reláció aszimmetrikus és reflexív? b) Mondjon példát aszimmetrikus és tranzitív relációra! Hogyan nevezik az ilyen tulajdonságú relációkat?

2.) (6 pont) Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}(I)$ egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és $a \in \operatorname{int} I$ belső pont.
a) Lehet-e több támaszegyenese f-nek a-ban?
b) Igaz-e, hogy ekkor f-nek szükségképpen van támaszegyenese is?
c) Igaz-e, hogy ha f' monoton I-n, akkor f-nek van támaszegyenese is tetszőleges $a \in I$-ben? (Válaszait indokolja!)

3.) (5 pont) Fogalmazza meg és bizonyítsa be az Integrálszámítás Alaptételét egy adott x_0 pontban folytonos függvény Riemann-integrálfüggvényéről!

4.) (4 pont) Adjon formulát az $1, 3, \ldots, 2n-1$ számok – tehát az első n páratlan szám – $P_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ összegére, és bizonyítsa is be azt!

5.) (6 pont) Legyen $f \in C(\mathbb{R})$ páros függvény, és tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.
a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor f-nek vagy létezik minimuma, vagy létezik maximuma (ahol a "vagy" itt nem kizáró értelemben értendő, tehát akár mindkettő is létezhet).
b) Mondjunk példát olyan, a feltételek szerinti függvényre, amelynek csak az egyik fajta szélsőértéke létezik!

6.) (4 pont) Számítsa ki a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{\exp(\log^3 n)}$ határértéket!

7.) (5 pont) Lehet-e megadni olyan k konvex függvényt $\mathbb{R}$-en, amelyre $k(-1) = 2$, $k(0) = 0$, $k(1) = -3$?

8.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan pontot a $\Phi(t) := (4\cos t + 3, 3\sin t + 4)$ elipszis-görbén, ahol a görbe érintője függőleges!

9.) (6 pont) Számítsa ki az $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$ integrált!

10.) (5 pont) Számítsa ki az $x(t) := e^t + e^{-t}$, $y(t) := 5 - 2t$ paraméteres egyenletű görbe ívhosszát, amidőn t befutja a $[0,3]$ szakaszt!

11.) (5 pont) Tekintsük az $y = x^2$ egyenletű parabola görbe $(1,1)$ és $(2,4)$ pontok közötti szakaszának y tengely körüli körbeforgatásával keletkező P forgási paraboloid alakzatot. Mennyi a P alakzat $F(P)$ felülete?

12.) (6 pont) Igazoljuk a *majorizálási tételt*: ha $|f(x)| \le g(x)$, és $\int_1^\infty g(x)\,dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_1^\infty f(x)\,dx$ improprius integrál is konvergens. (Útmutatás: Cauchy kritérium!)

Matematika A1H – I és J feladatsorok – Megoldások

1.) (4 pont) a) NEM (1) mert $a\ r\ a \Rightarrow a\ \not r\ a$ az aszimmetriát alkalmazva, ami ellentmondás volna, ha $a\ r\ a$ lenne, tehát *sohasem lehet* $a\ r\ a$, azaz szükségképpen *irreflexív* a reláció (és így nagyon nem reflexív) (1). b) Pl. a $<$ reláció $\mathbb{N}$-ben (1). Szigorú rendezés (1).

2.) (6 pont) a) NEM (f diffható, a belső pont – bizonyítottuk az e.a.-on) (1+1) b) NEM pl. $f(x) = x^3$ 0-ban (1+1) c) IGEN, mert ha f' pl. monoton növő I-n, akkor f konvex, és így van támaszegyenese is tetszőleges $a \in I$-ben (1+1).

3.) (5 pont) Tétel: Ha $R(x) := \int_a^x f(t)dt$, akkor $\exists R'(x_0)$ és $R'(x_0) = f(x_0)$ (2). Biz.: $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \{f(t) - f(x_0)\}dt$ ($\int$ intervallum-additivitása), és ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (folytonosság) (1+1+1).

4.) (4 pont) $P_1 = 1$, $P_2 = 1+3 = 4$ (1). Áll.: $P_n = n^2$ (1). Teljes indukcióval bizonyítunk (1); a számsor elején igaz (ld. előbb, ez volt 1 pont), $n \to n + 1$ pedig $P_{n+1} - P_n = 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2$, tehát ha $P_n = n^2$, akkor $P_{n+1} = (n + 1)^2$ (1).

5.) (6 pont) 1. áll.: ekkor f *korlátos* fv. . Biz.: ha $x > K$, akkor $|f(x) - 1| < 1$, tehát $|f(x)| < 2$ a limesz miatt (1); mivel f páros, ugyanez teljesül, ha $x < -K$; végül a $[-K, K]$ korlátos, zárt intervallumon e.a. tétel miatt f valamilyen C korlát alatt marad, tehát $|f(x)| < \max(2, C)$ az egész $\mathbb{R}$-en (1+1). a) Ha akár $\alpha := \sup f > 1$, akár $\beta := \inf f < 1$, akkor ezeket maximum- ill. minimumként fel is veszi f (állításért 1). Ugyanis pl. ha $\alpha > 1$ és $f(x_k) \to \alpha$, akkor x_k korlátos kell legyen, mert $\varepsilon < \alpha-1$ mellett elég nagy K-ra $|x| > K$ esetén $|f(x)| < 1 + \varepsilon < \alpha$ (1), és ekkor kiválasztva egy konvergens x_{k_n} részsorozatot és felhasználva f folytonosságát, $f(x_{k_n}) \to f(x^*) = \alpha$, x^* maximum-helye f-nek (1).
b) Pl. $f(x) := \frac{x^2}{1+x^2}$ amelyiknek csak minimuma van (az $x = 0$-ban a 0 értékkel) (1).

6.) (4 pont) $= \lim_{n\to\infty} \exp(\sqrt{n} \log n - \log^3 n) = +\infty$, mert $\sqrt{n} \log n - \log^3 n \to +\infty$ és $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ (1+1+1+1).

7.) (5 pont) NEM. U.i. konvex fv.nek a húr görbepontok közötti szakasza alatt kell mennie, de a $(-1, 2)$ és $(1, -3)$ pontok közötti $H(x) = -2,5x-0,5$ húrra $H(0) = -0,5 < k(0)$, tehát a függvénygörbe pontja van magasabban. (Más: a -1 és 0 ill. a 0 és 1 x-koordinátájú pontok közötti húrok meredeksége rendre -2 és -3, tehát csökkenő, holott konvex függvénynél ennek növekednie kéne – ezért nem lehet k konvex.) (Más: A $(0, 0)$ görbeponton át nincs olyan $T(x)$ egyenes, amelynek $(-1, 2)$ és $(1, -3)$ is fölötte volna $\Rightarrow \nexists$ támaszegyenese k-nak.)

8.) (4 pont) $\nabla\Phi(t) := (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-4 \sin t, 3 \cos t)$ (2), ennek meredeksége $m(t) = -0,75 \cot t$ (1), ami akkor válik végtelenné, ha $t = k\pi$, azaz $t = 0$ és $t = \pi$ esetén (1).

9.) (6 pont) $= \int \frac{x^2+5x+4}{(x^2+4)(x^2+1)}\ dx$ (1) $= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{5x\ dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \arctan x + J$ (1), $J = \int \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}\ dx$ (1); az e.h.-kra $A + C = 0, B + D = 0, 4A + C = 5, 4B + D = 0$ (1), tehát $A = 5/3, C = -5/3, B = D = 0$ (1), és $J = \frac{5}{6} \int \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+4}\right) dx = \frac{5}{6} \log \frac{x^2+1}{x^2+4} + C$ (1).

10.) (5) $\int_0^3 \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (-2)^2} dt = \int_0^3 \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt = \int_0^3 (e^t + e^{-t})dt = e^3 - e^{-3}$.

11.) (5 pont) $F = \int_1^2 2\pi x\sqrt{(2x)^2 + 1}dx = \frac{\pi}{6} \int_1^2 \left((4x^2 + 1)^{3/2}\right)' dx = \frac{\pi}{6} \left[(4x^2 + 1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2})$.

12.) (6 pont) $\left|\int_N^M f(x)dx\right| \le \int_N^M |f(x)|\, dx \le \int_N^M g(x)dx < \varepsilon$ ha $M > N > N_0(\varepsilon)$, tehát $\int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergens.