Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok

Matematika A1H - Néhány javasolt feladat konzultációra

Dátum: 2015. január 4.

1.) Mik azok a De Morgan azonosságok? Hogyan használhatjuk őket az alapvető halmazműveletek azonosságainak bizonyításában?

2.) Sorolja fel azoknak a lehetséges tulajdonságoknak a nevét és definícióját, amelyeket egy U alaphalmazon vett $R \subset U \times U$ relációval kapcsolatban definiáltunk! Válassza ki ezek közül azokat, amelyek tetszőleges (különböző) A és B halmazok $A \times B$ Descartes-szorzatán vett relációkra is értelmezhetőek!

3.) Bizonyítsa be egy I korlátos és zárt intervallumon ért. $y = f(x)$ fv. x tengely körüli körbeforgatásával keletkezett F forgástest a) térfogatának b) felszínének a képletét!

4.) Egy P valós függvény *lényegében páros*, ha $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(-x)}{f(x)} = 1$.

a) Igazoljuk, hogy ha $P \in C(\mathbb{R})$ lényegében páros folytonos függvény, akkor van szélsőértéke (azaz minimuma vagy maximuma) $\mathbb{R}$-en!

b) Melyek lesznek lényegében páros függvények a valós polinomok közül?

5.) Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in C(\mathbb{R})$ folytonos függvény, és konvergensek (tehát végesen léteznek) a $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ és $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ határértékek, akkor g korlátos függvény!

6.) Fv.vizsgálattal döntsük el, hogy invertálható-e a $T(x) := \arctan\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right)$ fv.?

7.) Vizsgáljuk meg és ábrázoljuk az $\alpha(x) := \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + 2\arcsin(x)$ függvényt!

8.) Igaz-e: : "Ha egy $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény korlátos, akkor páros függvény" ?

9.) $\displaystyle\int \frac{3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}e^{3\sqrt{x}} - \sqrt{x}}\,dx.$ $\quad$ E: $2\log\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) - \log\left(e^{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} + 1\right) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

10.) Tekintsük az $y = \operatorname{ch} x$ függvényt, és a $[0, 1]$ szakaszon ezalatt a görbe alatt (de az x tengely fölött) elhelyezkedő pontok által alkotott S sikidomot! Számítsuk ki ennek a síkidomnak a) a területét; b) (az S síkidomot homogén lemeznek tekintve) a súlypontját; c) az x tengely körüli megforgatásával nyert F forgástest felszínét és térfogatát; d) az y tengely körüli megforgatásával nyert G forgástest felszínét és térfogatát!

11.) Konvergens-e az $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ improprius integrál? (Ha igen, számítsa ki és igazolja az értéket, ha nem, indokolja, meg hogy miért nem konvergens az integrál!)

12.) Igazoljuk a következő, úgynevezett "integrál-összehasonlító kritériumot": Ha $f > 0$ monoton csökkenő függvény, akkor a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha az $\displaystyle\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ improprius Riemann-integrál konvergens! (Útmutatás: Vegyük észre, hogy mindkét mennyiség olyan határértékkel van definiálva, ami $f > 0$ miatt monoton növekvő. Ezért a konvergencia egyenértékű a határértékben szereplő mennyiségek korlátosságával.)